

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم الثانوي العام

الرياضيات

الجزء الثاني

السنة الأولى من التعليم الثانوي

طبعة منقحة

الجدعان المشتركان:

- علوم
- تكنولوجيا



الديوان الوطني للطباعة والمطبوعات المدرسية

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم الثانوي العام

الرياضيات

الجزء الثاني

السنة الأولى من التعليم الثانوي

طبعة منقحة

الجدعان المشتركان:

- علوم
- تكنولوجيا



الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

المؤلفون

عبد القادر سامي مفتش التربية والتكوين
محمد عوان مفتش التربية والتكوين
السيدة كشيش أستاذة التعليم الثانوي
قويدر فلاح أستاذ التعليم الثانوي
منصور بوخلوف أستاذ التعليم الثانوي

تعديل

عبد القادر سامي مفتش التربية والتكوين
محمد عوان مفتش التربية والتكوين
خالد محتوت أستاذ رياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

لعل من المسلم به أن الكتاب المدرسي، وخاصة في نظامنا التربوي وفي الوضع الراهن، يعتبر في مقدمة الوثائق التربوية والوسائل الأساسية بالنسبة لعملية التعليم والتعلم. فوجوده يكتسي أهمية بالغة سواء بالنسبة للتلميذ أو الأستاذ. إذ هو مرجع لـأول وسند بيداعوجي للثاني. والواقع أن بعض الكتب المستعملة في مرحلة التعليم الثانوي، والتي يعود تاريخ إصدار أكثرها إلى الثمانينات، أصبحت لا تسائر المناهج لا من حيث المحتوى ولا من حيث المنهجية، نظرا لما اعترى برامج هذه المرحلة التعليمية من تغيير وتعديل، خاصة مع بداية العشرية الجارية التي عرف فيها التعليم الثانوي تغييرات معتبرة شملت بنيته ومحتواه. الأمر الذي زاد في اتساع رقعة التباين وقلة الانسجام بين البرامج التعليمية، والكتب المدرسية المتداولة التي بقيت كما هي منذ تأليفها.

وفي إطار الإجراءات التحسينية الشاملة والمتكاملة، ولمعالجة النقائص والاختلالات البيئية والعمل باستمرار على ترقية العوامل والوسائل التي تسهم في تحقيق الأهداف التربوية المسطرة، رأينا أن نشرع هذه السنة وتحضيرا للدخول المدرسي 1999 / 2000 في عملية تصحيح وتعديل وإثراء مضامين الكتب المدرسية المستعملة وتكييف محتوياتها - ما أمكن ذلك - مع البرامج المطبقة، مع مواصلة إعداد كتب جديدة لتغطية جميع المواد المدرسة والأساسية منها على الخصوص. هذا إلى جانب الإعداد لبناء مناهج جديدة - في إطار الإصلاح - ثم وضع كتب موافقة لها.

وتجدر الإشارة بهذا الصدد، إلى أن قضية الكتاب المدرسي لا تكمن في نوعيته وتوفره بين أيدي التلاميذ فحسب، بل تتعدى ذلك إلى كيفية استعماله بفعالية وإدراك وظيفته وأساليب استثمار محتوياته والانتفاع به. وهي أمور ينبغي للسادة الأساتذة أن يولوها العناية والاهتمام اللازمين.

أخيرا، نأمل أن يكون في هذا العمل ما يعزز جهود الأساتذة ويساعدهم على أداء مهامهم التربوية، وأن يجد فيه التلاميذ الأداة المشوقة والمحفزة على العمل والاجتهاد في طلب العلم.

والله ولي التوفيق

مدير التعليم الثانوي العام

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

هذا الكتاب موجه إلى أساتذة وتلاميذ السنة الأولى من التعليم الثانوي
جذعان مشتركين علوم وتكنولوجيا

وهو موافق للبرنامج الرسمي الذي تم إصداره سنة 1995 ،

لقد صيغت جميع دروس هذا الكتاب بما يناسب مستوى التلميذ من بسيط
الأسلوب اللغوي مع الحرص على الدقة في التعبير عن المفاهيم الرياضية .

يتكون هذا الكتاب من جزئين وكل باب منها يحتوي على عدة دروس .

الجزء الأول يحتوي على خمسة أبواب

والجزء الثاني يحتوي على أربعة أبواب

توجد في آخر كل باب تمارين كثيرة ومتنوعة، يمكن للأستاذ إستغلالها والإستفادة
منها لترسيخ المفاهيم وإعطاء التلاميذ فرصة للتفكير في القسم أو في المنزل .

الباب الأول خاص بالمنطق الذي ينبغي تدريسه من حيث الإستعمال وليس
من شأن ذاته .

الباب الثاني (الحساب العددي) والباب الثالث (الهندسة المستوية) خاصان
بمراجعات وتتمات أساسية تقدم في بداية العام الدراسي ويتم الرجوع إليها كلما
إقتضت الضرورة ذلك .

الباب الرابع (العلاقات ، التطبيقات ، العمليات الداخلية ، البني الجبرية)
ينبغي تقديم مواضعه بالدقة اللازمة دون التوسع في دراستها .

الباب الخامس (الأشعة) والباب السادس (المعادلات والمترجمات)
هامان جداً ويلعبان دوراً أساسياً في المراحل المقبلة .

الباب السابع (حساب المثلثات) والباب الثامن (الدوال العددية) يزودان التلميذ بالعناصر الأولية والأساسية في حساب المثلثات وفي التحليل.

الباب التاسع (الهندسة الفضائية) يساعد التلميذ على تصور الأشكال في الفضاء.

وأخيرا نرجو من كل الذين يستعملون هذا الكتاب أن يوافقونا بكل الانتقادات والملاحظات والإقتراحات التي من شأنها تحسين نوعية هذا الكتاب وجعله أكثر ملاءمة مع تطبيقها واستعمالها في الأقسام.

والله ولي التوفيق
المؤلفون

الباب السادس

المعادلات والمتراجحات

20. كثيرات الحدود

21. المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

22. المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

23. جمل معادلات وجمل متراجحات

تعتبر المواضيع الواردة في هذا الباب من أهم المواضيع المدروسة في السنة الأولى من التعليم الثانوي ، إذ أنها تمكن التلميذ من التحكم في آليات الحساب الجبري مثل النشر ، التحليل والاختزال . وتدربه على الاستعمال الدقيق والسليم للتكافؤات والاستلزمات وأنها تزوده بالوسائل والأدوات الرياضية التي يحتاج إليها في الدروس المقبلة ، إذ لها تطبيقات كثيرة ومفيدة مثلاً في دراسة الدوال وفي دراسة إشارة المشتقات .

1 - كثيرات الحدود لمتغير حقيقي :

1.1 - وحيدات الحد لمتغير حقيقي

التعريف

إذا كان f عدداً حقيقياً وكان ρ عدداً طبيعياً فإن : الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي s العدد الحقيقي f^s تسمى دالة وحيد الحد .

- العدد الحقيقي f^s يدعى وحيد الحد للمتغير الحقيقي s .
- العدد الحقيقي f يسمى معامل وحيد الحد f^s .
- إذا كان $f \neq 0$ فإن العدد الطبيعي ρ يسمى درجة وحيد الحد f^s .
- إذا كان $f = 0$ فإن وحيد الحد f^s يسمى وحيد الحد المعلوم .
- نلاحظ أن درجة وحيد الحد المعلوم غير معينة .
- وحيدات الحد التي لها نفس الدرجة تسمى وحيدات الحد المتشابهة .
- أمثلة :

- (1) $2 - s^3$ هو وحيد حدّ درجته 3 ومعامله (-2)
- (2) $(2\sqrt{2} - 1 - s^4)$ هو وحيد حدّ درجته 4 ومعامله $(1 - 2\sqrt{2})$
- (3) كل عدد حقيقي ثابت f هو وحيد حدّ درجته 0 ومعامله f .
- (4) s^{-1} و $2\sqrt{s}$ ليسا وحيدى حدّ لأنه لا يمكن كتابتهما على الشكل f^s مع ρ عدد طبيعي .

2.1 - كثيرات الحدود لمتغير حقيقي

التعريف

كثير الحدود للمتغير الحقيقي s هو مجموع وحيدات حدّ للمتغير الحقيقي s .

مثال :

$$ك(س) = -4س + 5س^5 + 3س^3 - 2س + 8س^3 - 8س + 4س^4 .$$

ك(س) هو كثير حدود للمتغير الحقيقي س .

باستعمال قواعد الحساب في ج يمكن كتابته كما يلي :

$$ك(س) = 5س^5 - 7س^2 - 6س - 4س^4 .$$

وهذه الكتابة تسمى الشكل المبسط والمرتب لكثير الحدود ك(س) .

• الدالة كثير الحدود .

الدالة تا التي ترفق بكل عدد حقيقي س كثير الحدود تا (س) تسمى دالة كثير الحدود .

• كثير الحدود المعدوم

كثير الحدود المعدوم هو كثير حدود تا (س) يحقق ما يلي :

$$٧س \equiv ج : تا(س) = 0$$

• الكتابة العامة لكثير حدود مبسط ومرتب

يمكن كتابة أي كثير حدود تا (س) مبسط ومرتب وغير معدوم على الشكل العام التالي :

$$تا(س) = ا_٥س^٥ + ا_٤س^٤ + + ا_١س^١ + ا_٠ حيث ا_٥ \neq 0$$

• العدد الطبيعي ٥ يسمى درجة كثير الحدود تا (س) .

• وحيدات الحد ا_٥س^٥ ؛ ا_٤س^٤ ؛ ؛ ا_١س^١ ؛ ا_٠ تسمى

حدود كثير الحدود تا (س) .

• الأعداد الحقيقية ا_٥ ، ا_٤ ، ؛ ا_١ ؛ ا_٠ تسمى معاملات كثير الحدود تا (س) .

أمثلة :

(1) كل كثير حدود من الدرجة الأولى يكتب على الشكل العام :

$$اس + ب \quad \text{حيث } ا \neq 0$$

(2) كل كثير حدود من الدرجة الثانية يكتب على الشكل العام :

$$اس^2 + ب س + ح \quad \text{حيث } ا \neq 0$$

(3) كل كثير حدود من الدرجة الثالثة يكتب على الشكل العام :

$$اس^3 + ب س^2 + ح س + د \quad \text{حيث } ا \neq 0$$

درجتا مجموع وجداء كثيري حدود

نذكر فيما يلي نتيجتين تتعلقان بدرجتي مجموع وجداء كثيري حدود .

- إن درجة مجموع كثيري حدود هي أصغر من أو تساوي درجة كثير الحدود الذي له أكبر درجة

مثلاً : إذا كان

$$(1) \quad \text{تا } (س) = س^2 - س \quad \text{و} \quad \text{ها } (س) = -س^2 + 2س + 1$$

$$\text{فإن } \text{تا } (س) + \text{ها } (س) = س + 1$$

نلاحظ في هذا المثال أن درجة (تا) + (ها) (س) تساوي 1 وهي

أصغر من درجتي تا (س) و ها (س) .

$$(2) \quad \text{ك } (س) = س^3 - 2 \quad \text{و} \quad \text{ها } (س) = -س^2 + 2س + 1$$

$$\text{فإن } \text{ك } (س) + \text{ها } (س) = س^3 - س^2 + 2س - 1$$

نلاحظ في هذا المثال أن درجة (ك) + (ها) (س) تساوي درجة

ك (س) الذي له أكبر درجة .

- إن درجة جداء كثيري حدود تساوي مجموع درجتيهما

مثلاً : إذا كان

$$\text{تا } (س) = س^3 - س \quad \text{و} \quad \text{ها } (س) = -س^2 + 2س - 1$$

$$\text{فإن } \text{تا } (س) \times \text{ها } (س) = -س^5 + 2س^4 - 4س^3 + 2س^2 + س - 1$$

نلاحظ أن درجة (تا (س) × ها (س)) هي 5 وتساوي مجموع درجتي
تا (س) و ها (س) .

3.1 - كثير الحدود المعلوم

لقد رأينا أن كثير الحدود المعلوم هو كثير الحدود تا (س) بحيث :

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \text{تا (س)} = 0$$

نقبل النتيجة التالية :

يكون كثير حدود مبسط كثير الحدود المعلوم إذا وفقط إذا كانت كل
معاملاته معدومة .

أي بعبارة أخرى :

$$[\forall s \in \mathbb{C} : \text{تا (س)} = 0 \Leftrightarrow 0 = f_0 + \dots + f_{1-p} s^{1-p} + f_p s^p]$$

تطبيق : يمكن استعمال هذه النتيجة للبحث عن العنصر المحايد لعملية
داخلية

مثلاً : إذا كانت \star عملية داخلية في \mathbb{C} حيث :

$$s \star e = (s + 2)(e + 2) - 2$$

فإن العنصر المحايد ه (إن وجد) معرف كما يلي :

$$\forall s \in \mathbb{C} : s \star h = h \star s = s \quad (\text{لأن } \star \text{ عملية تبديلية})$$

$$\left[\forall s \in \mathbb{C} : s \star h = h \star s = s \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\forall s \in \mathbb{C} : (s + 2)(h + 2) - 2 = s \right]$$

$$\Leftrightarrow (1) \left[0 = (2 + h^2) + s(1 + h) : \forall s \in \mathbb{C} \right]$$

القضية (1) تعني أن كثير الحدود $(1 + h)s + (2 + h^2)$ هو كثير
الحدود المعلوم .

إذن :

$$\left[\begin{array}{l} 0 = (2 + ه 2) + س (1 + ه) : ه \ni س \\ \Downarrow \\ (0 = 2 + ه 2 \text{ و } 0 = 1 + ه) \end{array} \right]$$

أي : ه = 1 -

إذن العنصر الحيادي للعملية * هو (1 -) .

4.1 - تساوي كثيري حدود

التعريف

يتساوى كثيرا الحدود تا (س) و ها (س) إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$ه \ni س : تا (س) = ها (س)$$

نقبل النظرية التالية :

يتساوى كثيرا حدود مبسطان إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الدرجة وكانت معاملات وحيدات الحد المتشابهة فيهما متساوية
مثلاً :

$$تا (س) = (1 + ه) س^2 - س + ح$$

$$ها (س) = 2 س^2 + س + 2$$

يتساوى كثيرا الحدود تا (س) و ها (س) إذا وفقط إذا كان :

$$\left. \begin{array}{l} 1 = ه \\ \text{و} \\ 1 - = س \\ \text{و} \\ 2 - = ح \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} 12 = 1 + ه \\ \text{و} \\ 1 = س - \\ \text{و} \\ 2 = ح - \end{array} \right\}$$

2. تحليل كثير حدود : إن تحليل كثير حدود هو كتابته على شكل جداء كثيرات حدود نذكر فيما يلي بعض القواعد التي تسمح بتحليل كثير حدود

1.2 - التحليل بواسطة عامل مشترك

يمكن كتابة مجموع جداءات لها عامل مشترك على شكل جداء حسب القاعدة التالية : $a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + a + 1)$ أمثلة :

$$(1) \quad 5s^5 - 2s^2 - 3s = s^2(5s^3 - 2 - 3s)$$

$$(2) \quad s^2 + s - 1 = (s + 1)(s - 1)$$

$$= (1 + s)(1 - s)$$

$$(3) \quad s^3 + s^2 + s + 1 = (s^2 + s + 1)(s + 1)$$

$$= s^2(s + 1) + (s + 1)$$

$$= (s + 1)(s^2 + 1)$$

2.2 - التحليل باستعمال المتطابقات الشهيرة :

نذكر فيما يلي بعض المتطابقات الشهيرة المدروسة خلال السنوات السابقة .

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

أمثلة : توضّح الأمثلة التالية فكرة استعمال المتطابقات الشهيرة في تحليل كثيرات الحدود .

$$(1) \quad (a + 1)(a^2 + a + 1) = a^3 + 1$$

$$\begin{aligned}
& (1 + س - 3 - 4س) (1 - س + 3 - 4س) = (س) \text{ تا} \\
& (2 - س) (4 - 11س) = \\
& (2 + 3س) (4 - 11س) - = \\
& 1 + 2س^2 + 4س = (س) \text{ تا} (2) \\
& 2(1 + 2س^2) = \\
& 3س^2 - 3س + 2س^2 = (س) \text{ تا} (3) \\
& 2س(1 + 2س^2) = \\
& 2س(1 - س) = \\
& 8س^3 + 12س^2 + 6س + 1 = (س) \text{ تا} (4) \\
& 2(1 + 2س^2) = \\
& 8س^3 - 3س = (س) \text{ تا} (5) \\
& 2س(1 + 2س^2) (2 - س) = \\
& 1 - 4س^4 = (س) \text{ تا} (6) \\
& 2س(1 + 2س^2) (1 - 2س) = \\
& 2س(1 + 2س^2) (1 - س) (1 - س) =
\end{aligned}$$

3 - جذور كثير حدود :

1.3. التعريف

يكون العدد الحقيقي α جذراً لكثير الحدود $f(س)$ إذا وفقط إذا كان
 $0 = f(\alpha)$ تا

مثلاً :

- العددان 2 و (-2) هما جذران لكثير الحدود $f(س) = س^2 - 4$
لأن $0 = f(2)$ و $0 = f(-2)$ تا
- الأعداد (-1) ، 0 ، 1 ليست جذوراً لكثير الحدود
تا $f(س) = س^2 - 4$ لأن : $0 \neq f(1)$ و $0 \neq f(0)$ و
 $0 \neq f(-1)$ تا

2.3. النظرية

إذا كان α جذراً لكثير حدود $\text{تا} (س)$ فإنه يوجد كثير حدود $\text{ك} (س)$ يحقق ما يلي :

$\text{تا} (س) = (س - \alpha) \cdot \text{ك} (س)$

ملاحظة :

إذا كانت درجة كثير الحدود $\text{تا} (س)$ هي \varnothing فإن درجة كثير الحدود $\text{ك} (س)$ هي $(1 - \varnothing)$.

مثال : $\text{تا} (س) = س^3 - 5س^2 + 5س - 1$

نلاحظ أن $\text{تا} (1) = 0$. إذن العدد 1 هو جذر لكثير الحدود $\text{تا} (س)$.

حسب النظرية السابقة . يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $(س^2 + ب س + ح)$ بحيث يكون :

$$\text{تا} (س) = (س - 1) (س^2 + ب س + ح)$$

أي $\text{تا} (س) = س^3 + ب س^2 + ح س - س^2 - ب س - ح = س^3 + (ب - 1) س^2 + (ح - ب) س - ح$ وبتطبيق نظرية تساوي كثيري حدود نستنتج أن :

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 1 \\ 5 = 1 - ب \\ 5 = ب - ح \\ 1 = ح - 1 \end{array} \right\} \text{أي} \left. \begin{array}{l} 1 = 1 \\ 4 = ب \\ 1 = ح \end{array} \right\}$$

إذن : $\text{تا} (س) = (س - 1) (س^2 - 4س + 1)$

4 - الدوال الناطقة والكسور الناطقة :

1.4. التعريف

$\text{تا} (س)$ و $\text{ها} (س)$ كثيرا حدود .

الدالة التي تفرق بكل عدد حقيقي $س$ العدد الحقيقي $\frac{\text{تا} (س)}{\text{ها} (س)}$ تسمى دالة ناطقة

• العدد الحقيقي $\frac{\text{تا (س)}}{\text{ها (س)}}$ يسمى كسراً ناطقاً

• يكون الكسر الناطق $\frac{\text{تا (س)}}{\text{ها (س)}}$ معرّفاً إذا وفقط إذا كان مقامه
ها (س) يختلف عن الصفر .

أمثلة :

(1) ك (س) = $\frac{1 - \text{س}}{1 + \text{س}^2}$ هو كسر ناطق معرف في مجموعة الأعداد

الحقيقية لأن : $\forall \text{س} \in \mathbb{C} : \text{س}^2 + 1 \neq 0$

(2) كا (س) = $\frac{2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}}$ هو كسر ناطق معرف في المجموعة $\mathbb{C} - \{1\}$

2.4- اختزال الكسور الناطقة

توضح الأمثلة التالية كيفية اختزال الكسور الناطقة :

المثال 1 : ك (س) = $\frac{1 - \text{س}^2}{1 + \text{س}^2 - 2\text{س}}$

تكون الدالة الناطقة ك معرفة إذا وفقط إذا كان

$$\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 \neq 0$$

أي (س - 1)² ≠ 0 أي س ≠ 1

إذن مجموعة التعريف ف للدالة ك هي ف = $\mathbb{C} - \{1\}$

لنختزل ك (س) . لدينا : $\text{س}^2 - 1 = (\text{س} - 1)(\text{س} + 1)$

$$\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = (\text{س} - 1)^2$$

ومنه : ك (س) = $\frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{(\text{س} - 1)^2}$

لما س ≠ 1 يكون : س - 1 ≠ 0

يمكن، عندئذ . قسمة حدّي الكسر ك (س) على (س - 1)

$$\frac{1 + س}{1 - س} = ك (س) : \text{ فنحصل على}$$

$$\frac{1 + س}{1 - س} = ك (س) : \text{ ف } \exists \text{ س } \vee \text{ إذن}$$

$$\frac{1 - س^3}{1 - س^2} = ل (س) : \text{ المثال 2}$$

تكون الدالة الناطقة ل معرفة إذا وفقط إذا كان :

$$س^2 - 1 \neq 0$$

أي (س - 1) (س + 1) $\neq 0$ أي س $\neq 1$ و س $\neq -1$
إذن مجموعة التعريف ف للدالة ل هي ف = ح - {1 - ، 1 +}
لنختزل ل (س) .

$$\text{لدينا : } 1 - س^3 = (س - 1) (س^2 + س + 1)$$

$$1 - س^2 = (س - 1) (س + 1)$$

$$\frac{(س - 1) (س^2 + س + 1)}{(س - 1) (س + 1)} = ل (س) : \text{ ومنه}$$

$$\text{لما } \exists \text{ س } \vee \text{ ف يكون س } - 1 \neq 0$$

يمكن ، عندئذ ، قسمة حدّي الكسر ل (س) على (س - 1)

$$\frac{1 + س + س^2}{1 + س} = ل (س) : \text{ فنحصل على}$$

$$\frac{1 + س + س^2}{1 + س} = ل (س) : \text{ ف } \exists \text{ س } \vee \text{ إذن}$$

ملاحظة : لتكن الدالة الناطقة ها المعرفة كما يلي :

$$\text{ها (س) = } \frac{1 + س + س^2}{1 + س} , \text{ الدالتان الناطقتان ل و ها غير متساويتين}$$

لأن مجموعتي تعريفهما مختلفتان .

مثال 3 :-

$$\frac{1 + s^3}{1 + s} = (s) \text{ تا}$$

تكون الدالة الناطقة تا معرفة إذ فقط إذا كان

$$s + 1 \neq 0 \quad \text{أي } s \neq -1$$

إن مجموعة التعريف ف للدالة تا هي $F = \{s - 1\}$ لنختزل تا (s) .

$$\text{لدينا : } s^3 + 1 = (s + 1)(s^2 - s + 1)$$

$$\text{ومنه : } (s) \text{ تا} = \frac{(s + 1)(s^2 - s + 1)}{s + 1}$$

$$\text{لما } s \neq -1 \text{ يكون } s + 1 \neq 0$$

يمكن ، عندئذ ، قسمة حدّي الكسر تا (s) على (s + 1)

$$\text{فنحصل على } (s) \text{ تا} = s^2 - s + 1$$

$$\text{إذن } s \in \{s - 1\} : (s) \text{ تا} = s^2 - s + 1$$

ملاحظة :

لتكن الدالة كثير الحدود ها حيث ها (s) = $s^2 - s + 1$

الدالتان تا و ها غير متساويتين لأن مجموعتي تعريفهما مختلفتان .

21

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

1 - عموميات :

1.1 - مفهوم المعادلة

إذا كانت \mathcal{A} و \mathcal{B} دالتين لمجموعة \mathcal{E} في مجموعة \mathcal{L} فإن حل المعادلة $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (س) في المجموعة \mathcal{E} يعني تعيين مجموعة العناصر s من \mathcal{E} التي لها نفس الصورة بواسطة الدالتين \mathcal{A} و \mathcal{B} .
هذه المجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (س) في \mathcal{E} .

مثال 1 :

تا و \mathcal{A} دالتان للمجموعة \mathcal{E} في نفسها حيث :

$$\mathcal{A}(s) = 3s^2 - s - 5 ; \mathcal{B}(s) = 2s^2 - 2s + 1$$

العددان 2 و (-3) حلان للمعادلة $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (س)
لأن : $\mathcal{A}(2) = \mathcal{B}(2)$ و $\mathcal{A}(-3) = \mathcal{B}(-3)$
بينما الأعداد (-2) ، 0 ، $\sqrt{2}$ ليست حلولاً لهذه المعادلة
لأن : $\mathcal{A}(-2) \neq \mathcal{B}(-2)$ ؛ $\mathcal{A}(0) \neq \mathcal{B}(0)$ ؛
تا $\mathcal{A}(\sqrt{2}) \neq \mathcal{B}(\sqrt{2})$.

مثال 2 :

تا و \mathcal{A} دالتان للمجموعة \mathcal{E} في نفسها حيث :

$$\mathcal{A}(s) = s^2 ; \mathcal{B}(s) = s$$

لنبحث عن مجموعة حلول المعادلة $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (س).

أولاً : إذا كان α عنصراً من Y فإنه يحقق المساواة

$$0 = \alpha - \alpha^2 \quad \text{أي} \quad \alpha = \alpha^2$$

$$0 = (1 - \alpha) \alpha \quad \text{وبالتالي :}$$

$$1 = \alpha \quad \text{أو} \quad 0 = \alpha$$

$$\text{إذن } \alpha \in \{0, 1\} \quad \text{أي} \quad Y \supset \{0, 1\} \quad (1)$$

ثانياً : من الواضح أن العددين 0 و 1 حلان للمعادلة المعطاة لأن

$$0 = 0 \quad \text{ها} \quad (0) \quad \text{و} \quad 1 = 1 \quad \text{ها} \quad (1).$$

$$\text{إذن } \{0, 1\} \supset Y \quad (2)$$

$$\text{من } (1) \text{ و } (2) \text{ نستنتج : } Y = \{0, 1\}$$

2.1 - مفهوم المتراجحة

إذا كانت T و H دالتين لمجموعة K في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} .

فإن حل المتراجحة $T(s) \geq H(s)$

$$\left(\text{أو} \quad T(s) > H(s) \right) \quad \text{في} \quad K \quad \text{يعني تعيين مجموعة}$$

العناصر s من K التي تحقق المتباينة $T(s) \geq H(s)$

$$\left(\text{أو} \quad T(s) > H(s) \right).$$

هذه المجموعة تسمى مجموعة حلول المتراجحة

$$T(s) \geq H(s) \quad \left(\text{أو} \quad T(s) > H(s) \right)$$

مثال 1 :

T و H دالتان للمجموعة \mathbb{R} في \mathbb{R} حيث :

$$T(s) = s^2 ; \quad H(s) = s.$$

الأعداد (-1) ، 0 ، 1 ليست حلولاً للمراجعة تا (س) > ها (س)
لأن المتباينات التالية غير محققة :

تا $(-1) > ها (-1)$ ؛ تا $(0) > ها (0)$ ؛ تا $(1) > ها (1)$.

بينما الأعداد $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هي حلول لهذه المراجعة لأن المتباينات التالية محققة .

تا $\left(\frac{1}{2}\right) > ها \left(\frac{1}{2}\right)$ ؛

تا $\left(\frac{1}{4}\right) > ها \left(\frac{1}{4}\right)$ ؛

تا $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > ها \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 :

تا و ها دالتان للمجموعة ج في نفسها حيث

تا (س) = -س + 2 ؛ ها (س) = س - 4

لنبحث عن ي مجموعة حلول المراجعة تا (س) ≤ ها (س) .

أولاً : إذا كان α عنصراً من ي فإنه يحقق المتباينة التالية :

$-\alpha + 2 \leq 4 - \alpha$ أي $2 \leq 6 - \alpha$ وهذا يعني أن $3 \leq \alpha$

إذن $\alpha \in [3, \infty[$

ومنه ي $\sup [3, \infty[$ (1)

ثانياً : إذا كان α عنصراً من المجال $\alpha \in [3, \infty[$ فإنه يحقق المتباينة

$3 \leq \alpha$ أي $2 \leq 6 - \alpha$

من المتباينة السابقة نستنتج :

$6 - (4 + \alpha) \leq 2 - \alpha$

$$4 - \alpha \leq 2 + \alpha - \text{ أي :}$$

$$\text{أي : } (\alpha) \leq (\alpha) \text{ ها}$$

إذن إذا كان α عنصراً من المجال $[-\infty, 3]$ فإنه حل للمترابحة

$$\text{تا (س) } \leq \text{ها (س)}$$

$$\text{أي : } \alpha \ni \text{ ي}$$

$$\text{ومن } [-\infty, 3] \ni \text{ ي (2)}$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج : } \text{ ي} = [-\infty, 3]$$

3.1 - المعادلات المتكافئة . المترابحات المتكافئة :

التعريف

تكون معادلتان (أو مترابحتان) معرفتان على نفس المجموعة متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

• إذا كانت (M_1) و (M_2) معادلتين (أو مترابحتين) متكافئتين نكتب :

$$(M_1) \Leftrightarrow (M_2)$$

• مثلاً :

$$\text{المعادلتان } S^2 = S \text{ و } S(S-1) = 0 \text{ متكافئتان .}$$

إذا كانت (M_1) معادلة (أو مترابحة) فإنه يمكن إيجاد معادلة (أو

مترابحة) (M_2) مكافئة لها سهلة الحل وذلك باستعمال القواعد التالية :

القاعدة 1

إذا كانت تا ، ها و عا ثلاث دوال معرفة على نفس المجموعة فإن :

$$\bullet \text{ تا (س) = ها (س) } \Leftrightarrow \text{تا (س) + عا (س) = ها (س)}$$

$$+ \text{ عا (س)}$$

$$\bullet \text{ تا (س) } \geq \text{ها (س) } \Leftrightarrow \text{تا (س) + عا (س) } \geq \text{ها (س)}$$

$$+ \text{ عا (س)}$$

بالخصوص إذا كان عا (س) = -ها (س) فإن :

$$\bullet \text{ تا (س) = ها (س) } \Leftrightarrow \text{ تا (س) - ها (س) } = 0$$

$$\bullet \text{ تا (س) } \geq \text{ ها (س) } \Leftrightarrow \text{ تا (س) - ها (س) } \geq 0$$

مثلاً :

$$\text{المعادلة } 2س^2 + 1 = س^2 - 2س + 1 \text{ (م) مكافئة}$$

$$\text{للمعادلة } 2س^2 + 1 = س^2 - 2س + 1 \Rightarrow 0 = 1 - س$$

$$\text{أي } 0 = 2س^2 + 1$$

$$\text{إذن (م) } 0 = 2س^2 + 1 \Leftrightarrow$$

القاعدة 2

إذا كانت تا و ها دالتين معرفتين على نفس المجموعة وكان λ عدداً حقيقياً غير معدوم فإن :

$$\text{تا (س) = ها (س) } \Leftrightarrow \lambda \text{ تا (س) } = \lambda \text{ ها (س) }$$

مثلاً :

$$\text{المعادلة } 2س^2 - 4س + 2 = 0 \text{ في ج مكافئة}$$

$$\text{للمعادلة } 0 = (2س^2 - 4س + 2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{أي : } 0 = 1 - س$$

$$\text{أي } 0 = (1 - س)^2$$

$$\text{إذن } 2س^2 - 4س + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = (1 - س)^2$$

القاعدة 3

إذا كانت تا و ها دالتين معرفتين على نفس المجموعة وكان λ عدداً حقيقياً غير معدوم فإن :

$$\bullet \text{ تا (س) } \geq \text{ ها (س) } \Leftrightarrow \lambda \text{ تا (س) } \geq \lambda \text{ ها (س) } \text{ إذا كان } \lambda \text{ موجباً}$$

$$\bullet \text{ تا (س) } \geq \text{ ها (س) } \Leftrightarrow \lambda \text{ تا (س) } \leq \lambda \text{ ها (س) } \text{ إذا كان } \lambda \text{ سالباً}$$

مثلاً :

$$\text{المترابحة } \frac{س}{3} + 3 \geq 2س + \frac{1}{2} \text{ في ح مكافئة}$$

$$\text{للمترابحة } 2س + 18 \geq 12س + 3$$

(بضرب طرفي المترابحة في العدد 6)

$$\text{أي : } -10س + 15 \geq 0$$

$$\text{بالقسمة على } (-5) \text{ نحصل على } 2س - 3 \leq 0$$

إذن :

$$0 \leq 3 - 2س \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2س \geq 3 + \frac{س}{3}$$

$$2 - \text{المعادلات من الشكل } اس + ب = 0$$

$$1.2 - \text{المعادلات من الدرجة الأولى :}$$

التعريف :-

نسمي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول س كل معادلة من الشكل $اس + ب = 0$ حيث $ا$ و $ب$ عدداً حقيقيان معلومان و $ا \neq 0$.

$$\text{بما أن } ا \neq 0 \text{ فإن : } اس + ب = 0 \Leftrightarrow س = -\frac{ب}{ا}$$

إذن :

$$\text{كل معادلة من الدرجة الأولى } اس + ب = 0$$

$$\text{تقبل ، في ح . حلاً وحيداً هو } \left(-\frac{ب}{ا} \right)$$

2.2 - المعادلات من الشكل $0 = ب + س$

لقد رأينا فيما سبق أن كل معادلة من الشكل $0 = ب + س$ تقبل حلاً وحيداً إذا كان $0 \neq 1$.

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها $0 = 1$.

لما $0 = 1$ المعادلة $0 = ب + س$ تكتب $0 = ب + س$

أي $0 = س - ب$

الطرف الأول لهذه المعادلة يساوي الصفر مهما يكن العدد الحقيقي س .

أما الطرف الثاني $(- ب)$ فهو معطى :

• إذا كان $0 = ب$ فإن كل عدد حقيقي س يحقق المساواة

$0 = س - ب$ فهو إذاً حل للمعادلة $0 = س - ب$

• إذا كان $0 \neq ب$ فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المساواة

$0 = س - ب$

وبالتالي المعادلة $0 = س - ب$ ليس لها حل في \mathbb{C} .

الخلاصة :

لتكن ، في \mathbb{C} ، المعادلة $0 = ب + س$
ولتكن ي مجموعة حلولها .

• إذا كان $0 \neq 1$ فإن $\{ \frac{ب}{1} - \} = ي$

• إذا كان $0 = 1$ و $0 = ب$ فإن $ي = \mathbb{C}$

• إذا كان $0 = 1$ و $0 \neq ب$ فإن $ي = \emptyset$

مثال 1 :

نعتبر ، في \mathbb{C} ، المعادلة $\frac{س}{3} + 2 = 3 + س$ (1)

لدينا :

$$3 + \frac{s}{3} = 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2s + 18 = 12 + 3s$$

$$10 = 15s \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2} = s \Leftrightarrow$$

إذن المعادلة (1) تقبل ، في \mathbb{C} ، حلاً وحيداً هو $\frac{3}{2}$

وَمجموعة حلولها هي $\{\frac{3}{2}\}$

مثال 2 : نعتبر ، في \mathbb{C} ، المعادلة :

$$3(3 + s) - (4 + s) = 2s - 5(1 - s) + 2(1 + s) \quad (2)$$

لدينا : (2) $\Leftrightarrow 9s + 12 - 4 - s = 2s - 5 + 5s + 2 + 2s$

$$7s + 12 = 7s - 3$$

$$0 = 15s \Leftrightarrow$$

المعادلة (2) ليس لها حل

وَمجموعة حلولها هي \emptyset .

مثال 3 : نعتبر ، في \mathbb{C} ، المعادلة :

$$(3) \quad \frac{4}{3} - \frac{2 - s}{6} = \frac{5 - s}{3}$$

لدينا : (3) $\Leftrightarrow 2(5 - s) = 4 - 2 + s$

$$4s + 10 = 4s - 10$$

$$0 = 0 \Leftrightarrow$$

إذن كل عدد حقيقي هو حل للمعادلة (3)

وَمجموعة حلولها هي \mathbb{C} .

3 - المتراجحات من الشكل $f + s + t \geq 0$

1.3 - المتراجحات من الدرجة الأولى :

التعريف : نسمي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهول s كل

متراجحة من الشكل $f + s + t \geq 0$

(أو $f + s + t > 0$ أو $f + s + t \leq 0$ أو $f + s + t < 0$)

حيث f و t عددان حقيقيان معلومان و $f \neq 0$

حل المتراجحة من الدرجة الأولى $f + s + t \geq 0$

لدينا : $f + s + t \geq 0 \Leftrightarrow f + t \geq -s$ (1)

بما أن $f \neq 0$ فإنه يمكن ضرب طرفي المتراجحة (1) في العدد $\frac{1}{f}$
فنحصل على :

$$s \geq -\frac{f+t}{f} \quad \text{إذا كان } f \text{ موجباً .}$$

$$\text{أو } s \leq -\frac{f+t}{f} \quad \text{إذا كان } f \text{ سالباً .}$$

إذن :

• إذا كان $f < 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $f + s + t \geq 0$

هي المجال $[-\frac{f+t}{f}, \infty)$ ،

• إذا كان $f > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة $f + s + t \geq 0$

هي المجال $[-\frac{f+t}{f}, \infty)$]

مثال 1 : نعتبر ، في \mathbb{R} ، المتراجحة

$$4s + 7 \leq 5s + 2 - (3s + 5) \quad (1)$$

لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow 4 \leq 7 + 5 \leq 3 - 2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 7 + 2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجال $]-5, +\infty[$

مثال 2 : نعتبر ، في ح ، المتراجحة :

$$(2) \quad \frac{5 + 2s}{2} > \frac{1 + s}{6} - \frac{1 - 2s}{3}$$

لدينا : (2) $\Leftrightarrow 2(1 - 2s) - (1 + s) < 3(5 + 2s)$

$$\Leftrightarrow 4s - 2 - s - 1 < 15 + 6s$$

$$\Leftrightarrow 3s - 18 < 0$$

$$\Leftrightarrow s < 6$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي المجال $]-6, +\infty[$

2.3 - المتراجحات من الشكل $as + b \geq 0$

لقد تعرّفنا فيما سبق على حلول المتراجحة $as + b \geq 0$ لما $a \neq 0$.

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها $a = 0$.

في هذه الحالة المتراجحة $as + b \geq 0$ تكتب :

$$0 \leq as + b \quad \text{أي} \quad 0 \leq s - b$$

الطرف الأول لهذه المتراجحة يساوي الصفر مهما يكن العدد الحقيقي s .

أما الطرف الثاني $(-b)$ فهو معطى :

• إذا كان $b < 0$ فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي s يحقق المتباينة

$$0 \leq s - b$$

- المتراجحة 0 \geq س - ب ليس لها أي حل في \mathbb{C} .
- إذا كان $0 \geq$ ب فإن كل عدد حقيقي س يحقق المتباينة 0 \geq س - ب فهو
إذاً حل للمتراجحة 0 \geq س - ب

الخلاصة :

لتكن ، في \mathbb{C} ، المتراجحة 1 \geq س + ب

ولتكن ي مجموعة حلولها .

• إذا كان 1 < 0 فإن ي = $[-\infty, -\frac{b}{a}]$

• إذا كان 1 > 0 فإن ي = $[\frac{b}{a}, +\infty]$

• إذا كان 1 = 0 و 0 \geq ب فإن ي = \mathbb{C}

• إذا كان 1 = 0 و 0 < ب فإن ي = \emptyset

5 - تمارين محلولة :

التمرين الأول :

حل ، في \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول س

$$(1) \quad \frac{5}{(2-s)(s-3)} = \frac{s+3}{2-s}$$

تكون المعادلة (1) معرفة إذا فقط إذا كان :

$$s-2 \neq 0 \quad \text{و} \quad (s-3)(s-2) \neq 0$$

$$\text{أي } s \neq 2 \quad \text{و} \quad s \neq 3$$

و بالتالي تكون مجموعة التعريف ف لهذه المعادلة

$$F = \mathbb{C} - \{2, 3\}$$

مهما يكن $s \neq f$ لدينا :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{(2-s)(s-3)} - \frac{s+3}{2-s} \Leftrightarrow (1) \\ 0 &= \frac{5 - (s-3)(s+3)}{(2-s)(s-3)} \Leftrightarrow \\ 0 &= 5 - (s-3)(s+3) \Leftrightarrow \\ 0 &= 4 - s^2 \Leftrightarrow \\ 0 &= (2-s)(2+s) \Leftrightarrow \\ 2 &= s \text{ أو } s = -2 \Leftrightarrow \\ 2 &= s \text{ (لأن } 2 \neq f) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

إذن :

مجموعة الحلول للمعادلة (1) هي $\{2\}$

التمرين الثاني :

حل ، في ح ، المعادلة ذات المجهول s :

$$(2) \quad 4 = |1+s| - |2+s|$$

لنضع $k = (s)$ $3 = |2+s| - |1+s|$ ولنكتب $k = (s)$ بدون استعمال رمز القيمة المطلقة

لدينا :

$$\left. \begin{aligned} &|1+s| - |2+s| = 3 \quad \text{إذا كان } s \leq -2 \\ &|1+s| - |2+s| = -3 \quad \text{إذا كان } -2 < s < -1 \\ &|1+s| - |2+s| = 1 \quad \text{إذا كان } -1 \leq s < 0 \\ &|1+s| - |2+s| = -1 \quad \text{إذا كان } 0 \leq s < 1 \\ &|1+s| - |2+s| = 3 \quad \text{إذا كان } s \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

الجدول التالي يبين كتابة ك (س) حسب قيم س .

$x +$	$1 -$	$2 -$	$\infty -$	س
3 س + 6	3 س + 6	3 س - 6		3 س + 2
س + 1	- س - 1	- س - 1		س + 1
2 س + 5	4 س + 7	2 س - 5		ك (س)

• في المجال $[-\infty, -2]$ لدينا :

$$4 = 5 - 2س \Leftrightarrow (2)$$

$$\frac{9}{2} - س \Leftrightarrow$$

العدد $\left(\frac{9}{2} - س\right)$ هو حل للمعادلة (2) لأن $\left(\frac{9}{2} - س\right)$

ينتمي إلى المجال $[-\infty, -2]$

• في المجال $[-2, -1]$ لدينا :

$$4 = 7 + 4س \Leftrightarrow (2)$$

$$\frac{3}{4} - س \Leftrightarrow$$

العدد $\left(\frac{3}{4} - س\right)$ ليس حلاً للمعادلة (2) لأن $\left(\frac{3}{4} - س\right)$

لا ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$

• في المجال $[-1, +\infty]$ لدينا :

$$4 = 5 + 2س \Leftrightarrow (2)$$

$$\frac{1}{2} - س \Leftrightarrow$$

العدد $\left(\frac{1}{2}-\right)$ حل للمعادلة (2) لأن $\left(\frac{1}{2}-\right)$ ينتمي إلى

المجال $]1- , +\infty[$

• إذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي : $\left\{ \frac{1}{2}-, \frac{9}{2}- \right\}$

التمرين الثالث :

حل ، في \mathbb{C} ، المعادلة $\tau(3-\tau) = 3 + s$ (3)
حيث s هو المجهول و τ عدد حقيقي معلوم نسبه بسيطاً .

لدينا : (3) $\Leftrightarrow \tau^2 - 3\tau = 3 + s$

$\Leftrightarrow \tau^2 - s - 3 = 3 + \tau$

$\Leftrightarrow (\tau^2 - 1 - s)(1 + \tau) = 3$ (3')

الناقشة :

• إذا كان $\tau^2 - 1 = 0$ أي $\tau = 1$ أو $\tau = -1$ فإن المعادلة (3')

ليست من الدرجة الأولى :

- إذا كان $\tau = 1$ فإن (3') تكتب $0 = s - 6$

و مجموعة حلولها هي \emptyset

- إذا كان $\tau = -1$ فإن (3') تكتب $0 = s$

و مجموعة حلولها هي \mathbb{C}

• إذا كان $\tau^2 - 1 \neq 0$ أي $\tau \neq 1$ و $\tau \neq -1$

فإن المعادلة (3') من الدرجة الأولى ولها حل وحيد هو :

$$\tau = \frac{3}{1 - \tau^2} \text{ أي } \frac{3(1 + \tau)}{1 - \tau^2}$$

التمرين الرابع :

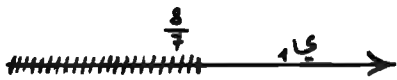
<p>حل ، في ح ، الجملة :</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $(أ) \quad 3 - 1 \geq 3 - \frac{1}{2} \text{ س}$ </div> <div style="text-align: center;"> $(ب) \quad 5 + 2 > 3 - \frac{1}{2} \text{ س}$ </div> </div>	}	(ج)
--	---	-----

لتكن I_1 و I_2 مجموعتي حلول المتراجحتين (أ) و (ب) على الترتيب .
 مجموعة حلول الجملة (ج) هي المجموعة $I_1 \cap I_2$.
 • لنعيّن المجموعة I_1

لدينا : (أ) $\Leftrightarrow 3 + 1 \geq 3 - \frac{1}{2} \text{ س}$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \geq 4 \text{ س}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{7} \geq \text{س}$$

ومنه $I_1 = \left[\frac{8}{7}, +\infty \right[$ 

• لنعيّن المجموعة I_2

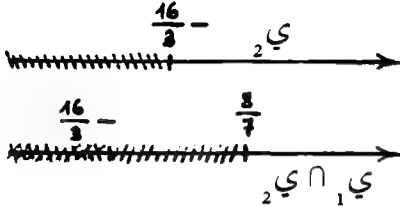
لدينا : (ب) $\Leftrightarrow 5 - 3 > 3 - \frac{1}{2} \text{ س}$

$$\Leftrightarrow 8 > 3 - \frac{3}{2} \text{ س}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} > \text{س}$$

$$\left[\infty + , \frac{16}{3} - \right] = \text{منه } I_2 =$$

$$\left[\infty + , \frac{8}{7} \right] = \text{إذن } I_1 \cap I_2 =$$



حل ، في ح ، المتراجحة :

$$(م) \quad (1 + ط) 3 > س (ط - 2)$$

حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي .

• إذا كان $ط - 2 = 0$ أي $ط = 2$ فإن المتراجحة (م)

نكتب $0 < س$ و مجموعة حلولها هي المجموعة ح

• إذا كان $ط - 2 < 0$ أي $ط < 2$ فإن :

$$\frac{(1 + ط) 3}{ط - 2} > س \Leftrightarrow (1 + ط) 3 > س (ط - 2)$$

$$\left[\frac{(1 + ط) 3}{ط - 2} , \infty - \right] \text{ هي المجال}$$

• إذا كان $ط - 2 > 0$ أي $ط > 2$ فإن :

$$\frac{(1 + ط) 3}{ط - 2} < س \Leftrightarrow (1 + ط) 3 > س (ط - 2)$$

$$\left[\infty + , \frac{(1 + ط) 3}{ط - 2} \right] \text{ هي المجال :}$$

1 - المعادلات من الدرجة الثانية

1.1 - التعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي س

$$0 = \text{كل معادلة من الشكل } اس^2 + ب س + ح = 0$$

حيث ا، ب، ح أعداد حقيقية معلومة و $ا \neq 0$

2.1 - حل معادلات بسيطة من الدرجة الثانية

(1) حل المعادلة : $اس^2 + 5س + 3 = 0$ في المجموعة ح

لدينا : $اس^2 + 5س + 3 = 0 \Leftrightarrow اس(اس + 3) + 5س = 0$

$$\Leftrightarrow اس = 0 \text{ أو } اس = -\frac{5}{3}$$

إذن :

$$0 \text{ و } \left(-\frac{5}{3}\right) \text{ هما حلّا المعادلة } اس^2 + 5س + 3 = 0$$

(2) حل ، في ح ، المعادلة : $اس^2 + 2س - 9 = 0$

لدينا : $اس^2 + 2س - 9 = 0 \Leftrightarrow اس(اس + 2) - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow اس(اس + 2) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow اس(اس + 2) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow اس = 5 \text{ أو } اس = -1$$

إذن :

5 و (- 1) هما حلّا المعادلة $اس^2 + 2س - 9 = 0$

(3) حل ، في ح ، المعادلة : $اس^2 + 6س - 7 = 0$

لدينا : $اس^2 + 6س - 7 = 0 \Leftrightarrow اس(اس + 3) + 3س - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow اس(اس + 3) + 3س - 7 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{ومنه : } 7 - 9 - 2(3 + س) &= 7 - 6 + 2س \\
 16 - 2(3 + س) &= \\
 (4 + 3 + س)(4 - 3 + س) &= \\
 (7 + س)(1 - س) &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{إذن : } 7 - 6 + 2س &= 0 \Leftrightarrow 0 = (7 + س)(1 - س) \\
 7 - 6 + 2س &= 0 \Leftrightarrow 1 = س \text{ أو } 7 - 6 + 2س = 0 \\
 1 \text{ و } (7 - 6 + 2س) &\text{ هما حلا المعادلة } 7 - 6 + 2س = 0 \\
 (4) \text{ حل ، في ح ، المعادلة } 7 - 6 + 2س &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{لدينا : } 2س - 2س = 2س - 2س + س \times \frac{1}{2} - 2س = 2س - 2س + \frac{1}{2} - 2س$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2} - س\right) &= \\
 1 + \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{2} - س\right) &= 1 + 2س - 2س \\
 \frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{2} - س\right) &= \\
 0 \leq 2\left(\frac{1}{2} - س\right) &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2س
 \end{aligned}$$

$$0 < \frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{2} - س\right) \Leftrightarrow 0 < 1 + 2س - 2س$$

إذن المعادلة $0 = 1 + 2س - 2س$ لا تقبل أي حل .

(5) حل ، في ج ، المعادلة $2س^2 - 5س + 3 = 0$ (1)

$$0 = \left(\frac{3}{2} + س \frac{5}{2} - 2س^2 \right) \Leftrightarrow 0 = 3 + 5س - 2س^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$0 = \frac{3}{2} + س \frac{5}{2} - 2س^2 \Leftrightarrow$$

بما أن :

$$س^2 \left(\frac{5}{4} \right) - س^2 \left(\frac{5}{4} \right) + س \frac{5}{4} \times 2 - 2س^2 = س^2 \frac{5}{2} - \frac{25}{16} - س^2 \left(\frac{5}{4} - س \right) =$$

نحصل على :

$$0 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} - س^2 \left(\frac{5}{4} - س \right) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2} + س \frac{5}{2} - 2س^2$$

$$0 = \frac{1}{16} - س^2 \left(\frac{5}{4} - س \right) \Leftrightarrow$$

$$0 = \left(1 - س \right) \left(\frac{3}{2} - س \right) \Leftrightarrow$$

$$0 = 3 + س 5 - 2س^2 \quad \text{إذن : } \frac{3}{2} \text{ و } 1 \text{ هما حلا المعادلة}$$

3.1 - الشكل النموذجي لكثير الحدود من الدرجة الثانية

ليكن $ف = 2س^2 + 3س + 1$ كثير حدود من الدرجة الثانية .

بما أن $ف \neq 0$ فإن :

$$\left[\frac{3}{1} + س \frac{1}{1} + 2س^2 \right] \quad 2س^2 + 3س + 1 = ف$$

$$\left[\frac{a}{f} + \left(\frac{b}{f2} \right)^2 - \left(\frac{b}{f2} \right)^2 + \frac{b}{f2} \cdot 2 + 2^2 \right] f =$$

$$\left[\frac{a}{f} + \frac{b^2}{2f4} - \left(\frac{b}{f2} + s \right)^2 \right] f =$$

$$\left[\frac{a f 4 - b^2}{2f4} - \left(\frac{b}{f2} + s \right)^2 \right] f =$$

إذن :

يمكن كتابة كثير الحدود من الدرجة الثانية $f s^2 + b s + a$ على الشكل

$$f \left[\frac{a f 4 - b^2}{2f4} - \left(\frac{b}{f2} + s \right)^2 \right]$$

الذي يسمى شكله النموذجي .

4.1 - حل معادلة من الدرجة الثانية

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية $f s^2 + b s + a = 0$ (1)
لدينا :

$$0 = \left[\frac{a f 4 - b^2}{2f4} - \left(\frac{b}{f2} + s \right)^2 \right] f \Leftrightarrow (1)$$

(باستعمال الشكل النموذجي)

$$0 = \frac{a f 4 - b^2}{2f4} - \left(\frac{b}{f2} + s \right)^2 \Leftrightarrow (0 \neq f \text{ لأن } f \neq 0)$$

$$(2) \quad \frac{a f 4 - b^2}{2f4} = \left(\frac{b}{f2} + s \right)^2 \Leftrightarrow$$

نلاحظ أن الطرف الأول لهذه المعادلة مربع فهو إذا موجب .
 أما الطرف الثاني فهو كسر مقامه موجب تماماً وإشارته إذاً هي إشارة بسطه
 الذي يسمى مميز المعادلة و يرمز إليه بالرمز Δ

$$\Delta = 4 - 2$$

إذن :

حل المعادلة (1) نميز ثلاث حالات حسب إشارة Δ

الحالة الأولى $\Delta > 0$

المعادلة (2) تكتب :
$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{1}{2} + s \right)^2$$
 (3)

بما أن $\frac{\Delta}{4} > 0$ و $\left[\forall s \in \mathbb{R} \left(\frac{1}{2} + s \right)^2 \geq 0 \right]$

فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي s يحقق المعادلة (3)
 إذن : في هذه الحالة ليس للمعادلة (1) أي حل .

الحالة الثانية $\Delta = 0$

المعادلة (2) تكتب :
$$0 = \left(\frac{1}{2} + s \right)^2$$

أي
$$0 = \left(\frac{1}{2} + s \right) \left(\frac{1}{2} + s \right)$$

إذن المعادلة المعطاة لها حلان يساويان $\left(-\frac{1}{2} \right)$

العدد $\left(-\frac{1}{2} \right)$ يدعى حلاً مضاعفاً لهذه المعادلة

الحالة الثالثة $\Delta < 0$

يمكن كتابة Δ على الشكل $\left(\sqrt{\Delta} \right)^2$ والمعادلة (2) تصبح مكافئة

للمعادلة التالية :

$$0 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{12} \right)^2 - \left(\frac{b}{12} + s \right)^2$$

$$0 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{12} - \frac{b}{12} + s \right) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{12} + \frac{b}{12} + s \right) \quad \text{أي :}$$

$$0 = \left(\frac{\sqrt{\Delta} + b -}{12} - s \right) \left(\frac{\sqrt{\Delta} - b -}{12} - s \right) \quad \text{وبالتالي :}$$

إذن : في هذه الحالة المعادلة المعطاة لها حلان متمايزان هما :

$$s' = \frac{\sqrt{4 - b^2} - b -}{12} \quad \text{و} \quad s'' = \frac{\sqrt{4 - b^2} + b -}{12}$$

الخلاصة

لتكن ، في ح ، المعادلة من الدرجة الثانية :

$$as^2 + bs + c = 0 \quad (1)$$

وليكن Δ مميزها ($\Delta = b^2 - 4ac$)

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) لا تقبل أي حل .
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلاً مضاعفاً هو $\left(-\frac{b}{2a} \right)$
- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما :

$$s' = \frac{\sqrt{\Delta} - b -}{2a} \quad \text{و} \quad s'' = \frac{\sqrt{\Delta} + b -}{2a}$$

ملاحظات :

(1) من الدراسة السابقة نستنتج أنه إذا كان للمعادلة من الدرجة الثانية

$$اس^2 + ب س + ح = 0$$

حلان س' ، س" فإنه يمكن كتابتها على الشكل :

$$اس(س - س') (س - س'') = 0$$

(2) إذا كان العددان الحقيقيان $ا$ ، $ح$ من إشارتين مختلفتين فإنه يكون

$$ا > 0 \text{ ومنه } ب^2 - 4ا < 0$$

وبالتالي المعادلة $اس^2 + ب س + ح = 0$ تقبل حلين متميزين .

(3) إذا كان $ب = 2س'$ فإنه يمكن أن نكتب :

$$\Delta = (2س')^2 - 4ا = 4[س'^2 - ا]$$

إشارة Δ هي إذا نفس إشارة العدد $(س'^2 - ا)$ الذي يدعى المميز

المختصر ويرمز اليه بالرمز Δ' .

إذا كان $ب = 2س'$ وكان $\Delta' < 0$ فإن عبارتي الحلين س' و س''

تصبحان :

$$س' = \frac{-ب' - \sqrt{\Delta'}}{ا} \quad \text{و} \quad س'' = \frac{-ب' + \sqrt{\Delta'}}{ا}$$

5.1 - أمثلة :

مثال 1 : حل ، في \mathbb{C} ، المعادلة : $اس^2 + 3س + 5 = 0$ (1)

المعادلة (1) من الشكل $اس^2 + ب س + ح = 0$

$$ا = 1 \quad ب = 3 \quad ح = 5$$

لدينا : $\Delta = ب^2 - 4ا$

$$\Delta = 3^2 - 4(1) = 5$$

بما أن $\Delta > 0$ فالمعادلة (1) تقبل ، في \mathbb{C} ، حلين متميزين هما :

$$\frac{5}{2} = \frac{10-}{4-} = \frac{7-3-}{(2-)^2} = 'س : أي \frac{\sqrt{\Delta}-\text{ب}-}{\sqrt{2}} = 'س$$

و

$$1- = \frac{4}{4-} = \frac{7+3-}{(2-)^2} = "س أي \frac{\sqrt{\Delta}+\text{ب}-}{\sqrt{2}} = "س$$

مثال 2 : حلّ ، في ج ، المعادلة : $س^3 \sqrt{2-}^2 + س = 0$ (2)

المعادلة (2) من الشكل $س^3 + س = 0$

$$1+ = \text{أ} ؛ \sqrt{2-} = \text{ب} ؛ 3 = \text{ح}$$

$$\Delta = 4-^2 = \text{أ}$$

$$0 = (3)(1)4-^2(\sqrt{2-}) =$$

بما أن $0 = \Delta$ فالمعادلة (2) تقبل ، في ج ، حلاً مضاعفاً

$$\frac{\text{ب}-}{\sqrt{2}} = "س = 'س \text{ هو}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = "س = 'س أي$$

مثال 3 : حلّ ؛ في ج ؛ المعادلة : $س^2 + 6س - 5 = 0$ (3)

المعادلة (3) من الشكل $س^2 + س = 0$

$$5- = \text{أ} ؛ 6 = \text{ب} ؛ 2- = \text{أ}$$

$$\Delta = 4-^2 = \text{أ}$$

$$6 = (5-)(2-)$$

$$4- =$$

بما أن $0 > \Delta$ فالمعادلة (3) لا تقبل حلاً .

مثال 4 : حل ، في ح ، المعادلة : $3س^2 + 26س + 16 = 0$ (4)

المعادلة (4) من الشكل $أس^2 + بس + ح = 0$

$$3 = أ \quad ; \quad 26 = ب \quad ; \quad 16 = ح$$

لنحسب المميز المختصر Δ'

$$\Delta' = ب^2 - 4أح$$

$$\Delta' = (26)^2 - 4(3)(16) = 121$$

بما أن $\Delta' > 0$ فإن المعادلة (4) تقبل حلين هما :

$$س' = \frac{-ب + \sqrt{\Delta'}}{2أ} \quad \text{و} \quad س'' = \frac{-ب - \sqrt{\Delta'}}{2أ}$$

أي :

$$س' = \frac{-26 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} \quad \text{و} \quad س'' = \frac{-26 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3}$$

$$س' = \frac{-26 + 11}{6} = -\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad س'' = \frac{-26 - 11}{6} = -\frac{37}{6}$$

ملاحظة : لحل المعادلة (4) يمكن استعمال المميز Δ

فنجد $\Delta = 484$ والحسابات تكون أكثر صعوبة

مثال 5 : حل ، في ح ، المعادلة :

$$(5) \quad 0 = ط + س(1 + ط) 2 + س^2 (1 - ط)$$

حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي

1 • إذا كان $ط = 1$ أي $0 = 1 - ط$ فإن المعادلة (5)

$$0 = 1 + س$$

فهي إذاً معادلة من الدرجة الأولى ولها حل وحيد هو $\left(-\frac{1}{4}\right)$

2 • إذا كان $ط - 1 \neq 0$ أي $ط \neq 1$ فإن المعادلة (5)

تصبح معادلة من الدرجة الثانية وهي من الشكل

$$أس^2 + ب س + ج = 0 :$$

$$أ = ط - 1 ؛ ب = 2(ط + 1) ؛ ج = ط$$

لنحسب المميز المختصر Δ' :

$$\Delta' = (ط + 1)^2 - 2(ط - 1)(ط)$$

$$= 3ط + 1$$

- إذا كان $3ط + 1 > 0$ أي $ط > -\frac{1}{3}$ فإن

المعادلة (5) لا تقبل حلاً .

- إذا كان $3ط + 1 = 0$ أي $ط = -\frac{1}{3}$ فإن

المعادلة (5) تقبل حلاً مضاعفاً

$$\text{هو } \left(\frac{(ط + 1)^2}{(ط - 1)^2} - \frac{1}{2} \right) \text{ أي } \left(\frac{1}{2} \right)$$

- إذا كان $3ط + 1 < 0$

$$\text{أي } ط \in \left[-\frac{1}{3} ، 1 \right[\cup \left[1 ، +\infty \right)$$

فإن المعادلة (5) تقبل حلين متمايزين هما :

$$س' = \frac{\sqrt{1 + 3ط} - (ط + 1)}{1 - ط}$$

$$س'' = \frac{\sqrt{1 + 3ط} + (ط + 1)}{1 - ط}$$

2 - المراجحات من الدرجة الثانية

1.2 - إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية

ليكن تا (س) كثير حدود من الدرجة الثانية

$$\text{تا (س)} = \text{س}^2 + \text{ب س} + \text{ح} \quad (\text{ب} \neq 0)$$

لقد رأينا فيما سبق أن :

$$\left[\frac{\text{ح}}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ب}}{2} + \text{س} \right)^2 \right] \text{س}^2 = \text{س}^2 + \text{ب س} + \text{ح}$$

$$\left[\frac{\Delta}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ب}}{2} + \text{س} \right)^2 \right] \text{س}^2 = \text{تا (س)}$$

لدينا ثلاث حالات حسب إشارة Δ .

الحالة الأولى $\Delta > 0$

$$\text{بما أن : } \text{ب}^2 \text{ س}^2 \geq 0 \quad \text{و} \quad 0 < \frac{\Delta}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ب}}{2} + \text{س} \right)^2$$

$$\text{فإنه } \text{ب}^2 \text{ س}^2 \geq \left(\frac{\Delta}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ب}}{2} + \text{س} \right)^2 \right) \text{س}^2$$

وبالتالي تا (س) لا ينعدم وإشارته هي إشارة س^2 وهذا مهما يكن العدد الحقيقي س.

الحالة الثانية $\Delta = 0$

$$\left(\frac{\text{ب}}{2} + \text{س} \right)^2 = \text{تا (س)}$$

$$\frac{\text{ب}}{2} = -\text{س}$$

وإشارة تا (س) هي إشارة f من أجل كل عدد حقيقي س يختلف عن

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

الحالة الثالثة $0 < \Delta$

في هذه الحالة يكون

$$\left[\frac{\sqrt{\Delta} + \sqrt{2}}{2} - \text{س} \right] \left[\frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{2}}{2} - \text{س} \right] \quad f = (\text{س}) \text{ تا}$$

أي تا (س) = f (س - س') (س - س'")

$$\frac{\sqrt{\Delta} + \sqrt{2}}{2} = \text{س}'' \text{ و } \frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{2}}{2} = \text{س}'$$

ينعدم تا (س') من أجل س = س' أو س = س''

وإشارة تا (س) هي إشارة الجداء f (س - س') (س - س'")

مهما يكن س يختلف عن س' و س'' .

يبين الجدول التالي إشارة تا (س) (بفرض س' > س'")

س	س' -	س' +	س'' +	س'' -
إشارة (س - س')	-	+	+	+
إشارة (س - س'')	-	-	+	+
إشارة (س - س') (س - س'')	+	-	+	+
إشارة تا (س)	إشارة f	إشارة (-f)	إشارة f	إشارة f

الخلاصة

ليكن تا (س) كثير الحدود من الدرجة الثانية :

$$\text{تا (س)} = \text{س}^2 + \text{ب س} + \text{ح}$$

وليكن Δ مميزه ($\Delta = \text{ب}^2 - 4\text{ح}$)

• إذا كان $\Delta > 0$ فإن تا (س) لا ينعدم وإشارته هي إشارة f وهذا
مها يكن العدد الحقيقي س .

• إذا كان $\Delta = 0$ فإن تا (س) يقبل جذراً مضاعفاً $\left(-\frac{\text{ب}}{2}\right)$

وإشارته هي إشارة f وهذا مها يكن س يختلف عن $\left(-\frac{\text{ب}}{2}\right)$

• إذا كان $\Delta < 0$ فإن تا (س) يقبل جذرين متمايزين

س' و س'' (س' > س'') وإشارة تا (س) هي :

إشارة f إذا فقط إذا كان س $\in]-\infty, \text{س}'[$ ، س' [س'' ، س'' [$+\infty$ ،

إشارة $(-f)$ إذا فقط إذا كان س $\in]\text{س}'', \text{س}'[$ ، س' [س'']

$\Delta > 0$ إشارة f

$\Delta = 0$ إشارة f إشارة f س' = س''

$\Delta < 0$ إشارة f إشارة $(-f)$ إشارة f س' س''

2.2 - حل متراجحة من الدرجة الثانية

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة من الشكل

$$اس^2 + بس + ح \geq 0 \quad (\text{أو } اس^2 + بس + ح > 0) \\ \text{أو } اس^2 + بس + ح \leq 0 \quad (\text{أو } اس^2 + بس + ح < 0) \\ \text{حيث } ا، ب، ح \text{ أعداد حقيقية و } ا \neq 0$$

يؤول حل المتراجحة من الدرجة الثانية $اس^2 + بس + ح \geq 0$ (1) إلى دراسة إشارة كثير الحدود $(اس^2 + بس + ح)$.
وتعين مجموعة قيم $س$ التي تحقق (1)

<p>مثال 1 : حل ، في ح ، المتراجحة :</p> $2س^2 - 3س + 1 > 0 \quad (1)$
--

المتراجحة (1) هي متراجحة من الدرجة الثانية .
لندرس إشارة كثير الحدود $(2س^2 - 3س + 1)$
لدينا : $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1$
إذن كثير الحدود $(2س^2 - 3س + 1)$ يقبل جذرين متميزين هما :

$$س' = \frac{1 - 3}{2} = -1 \quad \text{و} \quad س'' = \frac{1 + 3}{4} = 1$$

بما أن معامل $س^2$ موجب فإن كثير الحدود $(2س^2 - 3س + 1)$ يكون سالباً تماماً إذا وفقط إذا كان $س \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

إذن : مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجال : $س \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

مثال 2 : حل ، في ح ، المتراجحة :

$$2س^2 - س + 1 \leq 0 \quad (2)$$

المتراجحة (2) من الدرجة الثانية .

$$\Delta = (1 - 4س^2)(2 + 1) = 7 -$$

بما أن Δ سالب تماماً ومعامل $س^2$ موجب فإن كثير الحدود
($2س^2 - س + 1$) موجب تماماً مهما يكن العدد الحقيقي س .
إذن :

مجموعة حلول المتراجحة $2س^2 - س + 1 \leq 0$ هي المجموعة ح

مثال 3 : حل ، في ح ، المتراجحة :

$$4س^2 + 2س - 1 \leq 0 \quad (3)$$

المتراجحة (3) من الدرجة الثانية

لندرس إشارة كثير الحدود ($4س^2 + 2س - 1$)

$$\Delta' = (1 - 4س^2)(4 - 1) = 3 -$$

بما أن Δ' سالب ومعامل $س^2$ سالب فإن كثير الحدود
($4س^2 + 2س - 1$) سالب تماماً مهما يكن العدد الحقيقي س .
إذن :

مجموعة حلول المتراجحة : $4س^2 + 2س - 1 \leq 0$ هي المجموعة ϕ

مثال 4 : حل ، في ح ، الجملة التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 2س^2 - 3س + 1 \leq 0 \quad (أ) \\ 2س^2 + 2س - 1 < 0 \quad (ب) \end{array} \right\} \text{(ج) و}$$

لتكن $ي_1$ و $ي_2$ مجموعتي حلول المتراجحتين (أ) و (ب) على الترتيب .

مجموعة حلول الجملة (ج) هي المجموعة $ي_1 \cap ي_2$

تعيين المجموعة Y_1

لندرس إشارة كثير الحدود ($2س^2 - 3س + 1$)

$$\Delta = (3 - 4)(2) = 1$$

كثير الحدود ($2س^2 - 3س + 1$) يقبل جذرين متميزين هما :

$$س' = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{و} \quad س'' = \frac{1+3}{4} = 1$$

بما أن معامل $س^2$ موجب فإن كثير الحدود ($2س^2 - 3س + 1$) يكون موجباً إذا وفقط إذا كان

$$س \in \left[-1, 1 \right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$$

أي :

$$Y_1 = \left[-1, 1 \right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$$



تعيين المجموعة Y_2

لندرس إشارة كثير الحدود ($-س^2 + 2س + 2$)

$$\Delta = (2)^2 - 4(-1)(2) = 36$$

كثير الحدود ($-س^2 + 2س + 2$) يقبل جذرين متميزين هما :

$$س' = \frac{-2 - \sqrt{36}}{-2} = 5$$

$$س'' = \frac{-2 + \sqrt{36}}{-2} = -2$$

بما أن معامل $س^2$ سالب فإن كثير الحدود ($-س^2 + 2س + 2$)

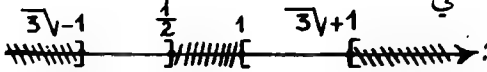
يكون موجباً تماماً إذا وفقط إذا كان

$$س \in \left[-2, 5 \right]$$

$$] \sqrt[3]{-1}, \sqrt[3]{+1} [= _2 \text{ ي}$$



إذن مجموعة حلول الجملة (ح) هي



$$] \sqrt[3]{-1}, 1] \cup [-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{-1} [= _2 \text{ ي} \cap _1 \text{ ي}$$

مثال 5 : لتكن المتراجحة $[\frac{2}{3}]$

$$(5) \quad 0 > \text{ط} + \text{س} (1 + \text{ط}) 2 + ^2 \text{س} (1 - \text{ط})$$

حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي
ولتكن ي مجموعة حلولها .

1) إذا كان $\text{ط} - 1 = 0$ أي $\text{ط} = 1$ فإن :

المتراجحة (5) تكتب : $4 \text{س} + 1 > 0$ وهي متراجحة من الدرجة الأولى

$$\text{ومنه ي} =] -\infty, -\frac{1}{4} [=$$

2) إذا كان $\text{ط} - 1 \neq 0$ أي $\text{ط} \neq 1$ فإن المتراجحة (5)

تصبح متراجحة من الدرجة الثانية

$$\text{لنضع تا (س)} = (\text{ط} - 1) 2 + ^2 \text{س} (1 + \text{ط}) + \text{س}$$

• إشارة مميز تا (س)

$$\Delta' = (\text{ط} + 1)^2 - \text{ط} (\text{ط} - 1)$$

$$\Delta' = 3\text{ط} + 1$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow \text{ط} = -\frac{1}{3}$$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow \text{ط} < -\frac{1}{3}$$

- إشارة معامل s^2
- معامل s^2 هو $(1 - ط)$
- $ط < 1 \iff 0 < 1 - ط$
- نحصل على الجدول التالي :

$\infty +$	1	$\frac{1}{3} -$	$\infty -$	ط
+		+	-	' Δ
+	0	-	-	$1 - ط$

النتائج :

- إذا كان $ط \in]-\infty, -\frac{1}{3}]$ فإن $'\Delta > 0$ و $(1 - ط) > 0$
- إذن : $\forall s \in \mathbb{C}$ تا $(s) > 0$ ومنه $\mathbb{C} =$
- إذا كان $ط \in]-\frac{1}{3}, 1]$ فإن $'\Delta < 0$ و $(1 - ط) > 0$
- إذن : تا (s) يقبل جذرين متمايزين s' و s'' ($s' > s''$)
تا $(s) > 0 \iff s \in]-\infty, -\frac{1}{3}]$ ، $s' \in [U]$ ، $s'' \in]-\infty, -\frac{1}{3}]$
ومنه $\mathbb{C} =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [U]$ ، $s' \in [U]$ ، $s'' \in]-\infty, -\frac{1}{3}]$
- إذا كان $ط \in]1, \infty[$ فإن $'\Delta < 0$ و $(1 - ط) < 0$
- إذن تا (s) يقبل جذرين متمايزين s' و s'' ($s' > s''$)
تا $(s) > 0 \iff s \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [U]$ ، $s' \in [U]$ ، $s'' \in]-\infty, -\frac{1}{3}]$
ومنه $\mathbb{C} =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [U]$ ، $s' \in [U]$ ، $s'' \in]-\infty, -\frac{1}{3}]$
- إذا كان $ط = -\frac{1}{3}$ فإن $'\Delta = 0$ و $(1 - ط) > 0$

إذن تا (س) يقبل جذراً مضاعفاً هو $\left(\frac{1}{2} \right)$ أي $\left(\frac{1+\tau}{1-\tau} \right)$

$$\forall \text{ س } \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} : \text{تا (س)} > 0$$

$$\text{ومنه ي} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

• إذا كان $\tau = 1$ فإن $\tau = 1 - 0 = 0$

$$\left[-\infty, -\frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty \right) = \text{ي}$$

3 - مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية :

1.3 - مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$a\tau^2 + b\tau + c = 0 \quad (1)$$

وليكن Δ مميزها .

إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلّين متمايزين أو متساويين هما :

$$\tau' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \tau'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

لدينا :

$$\tau' + \tau'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\tau' \tau'' = \frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{\Delta \sqrt{+ \beta -}}{12} \right) \left(\frac{\Delta \sqrt{- \beta -}}{12} \right) = "س' \times س"$$

$$\frac{\Delta -^2 \beta}{2 \times 4} =$$

$$\frac{(\Delta 4 -^2 \beta) -^2 \beta}{2 \times 4} =$$

$$\frac{\Delta 4}{2 \times 4} =$$

$$\boxed{\frac{\Delta}{1} = "س' . س"}$$

2.3 - حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$1س^2 + \beta س + \alpha = 0$$

وليكن α حلاً معلوماً لهذه المعادلة .

يمكن حساب الحل الثاني β باستعمال إحدى المساواتين :

$$\frac{\Delta}{1} = \beta \alpha \quad ; \quad \frac{\beta}{1} - = \beta + \alpha$$

مثلاً :

لتكن المعادلة $2س^2 - 3س + 1 = 0$ (1)

نلاحظ أن العدد 1 هو حل لهذه المعادلة

إذن الحل الثاني هو العدد β حيث

$$\frac{1}{2} = \beta \quad \text{أي} \quad \frac{1}{2} = \beta . 1$$

3.3 - إشارة حلّي معادلة من الدرجة الثانية

يمكن تعيين إشارة حلّي معادلة من الدرجة الثانية بدون حسابها عملياً وذلك بدراسة إشارة جذائهما وإشارة مجموعهما .
بالفعل :

- تكون لعددین إشارتان مختلفتان إذا وفقط إذا كان جداولهما سالباً تماماً .
- تكون لعددین نفس الإشارة إذا وفقط إذا كان جداولهما موجباً تماماً .
- وتكون عندئذ إشارتهما هي إشارة مجموعهما .

ينتج من ذلك ما يلي :

إذا كانت $اس^2 + بس + ح = 0$ (1) معادلة من الدرجة الثانية وكان Δ مميزها فإن :

$$\left(\begin{array}{l} \text{للمعادلة (1) حلان} \\ \text{إشارتهما مختلفتان} \end{array} \right) \Leftrightarrow \frac{ح}{ا} > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{للمعادلة (1) حلان} \\ \text{موجبان تماماً} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{ح}{ا} \leq 0 \\ \Delta < 0 \\ \frac{ح}{ا} < 0 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{للمعادلة (1) حلان} \\ \text{سالبان تماماً} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{ح}{ا} < 0 \\ \Delta < 0 \\ \frac{ح}{ا} > 0 \end{array} \right]$$

أمثلة :

(1) المعادلة $3س + 2س^2 - 1 = 0$ هي معادلة من الشكل :

$$اس^2 + ب س + ح = 0$$

$$1 = ا \quad ; \quad 3 = ب \quad ; \quad -1 = ح$$

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(-1) = 17$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين إشارتهما مختلفتان .

(2) المعادلة $2س^2 - 5س + 3 = 0$ هي معادلة من الشكل

$$اس^2 + ب س + ح = 0$$

$$1 = ا \quad ; \quad -5 = ب \quad ; \quad 3 = ح$$

لدينا :

$$\Delta = 25 - 12 = 13$$

$$1 = (3)(2) - (-5)^2 = -13$$

$$\Delta = 25 - 12 = 13$$

بما أن $\Delta > 0$ و $0 < \Delta$ و $0 < \frac{5}{2}$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين موجبين تماماً

(3) المعادلة $2س^2 + 10س + 21 = 0$ هي معادلة من الشكل

$$اس^2 + ب س + ح = 0$$

$$2 = ا \quad , \quad 10 = ب \quad , \quad 21 = ح$$

لدينا :

$$\Delta = 100 - 168 = -68$$

$$\Delta = 100 - 168 = -68$$

$$\Delta = 100 - 168 = -68$$

بما أن $\left(0 < \frac{\Delta}{1} \text{ و } 0 < \Delta' \text{ و } 0 > \frac{\Delta}{1} \right)$ فإن هذه المعادلة تقبل
حلين ساليين تماماً

4.3- تمرين محلول

ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي ط ، وجود و إشارة حلول
المعادلة :

$$(1) \quad 0 = (ط + 2)س^2 - (ط + 4)س + ط - 2$$

- إذا كان $ط + 2 = 0$ أي $ط = -2$ فإن المعادلة (1) تكتب :
 $0 = 4س + 2$ وتقبل حلاً واحداً موجباً هو 2 .
- إذا كان $ط + 2 \neq 0$ أي $ط \neq -2$ فإن المعادلة (1)
من الدرجة الثانية وهي من الشكل $اس^2 + بس + ح = 0$

$$ا = ط + 2 ، ب = -(ط + 4) ، ح = ط - 2$$

$$\text{لدينا : } \frac{ط - 2}{ط + 2} = \frac{ح}{ا}$$

إشارة $\frac{ح}{ا}$ هي إشارة الجداء $(ط - 2)(ط + 2)$ الذي هو كثير حدود

من الدرجة الثانية جذراه $(2 - ط)$ و $(2 + ط)$
ومعامل $ط^2$ فيه هو $(1 -)$.

$$\Delta = (ط + 4)^2 - 4(ط + 2)(ط - 2) = 5ط^2 + 8ط$$

Δ هو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه $\left(\frac{8}{5} - ط \right)$ و 0 ومعامل

$ط^2$ فيه هو $(5 +)$

$$\frac{ب}{ا} = \frac{ط + 4}{ط + 2}$$

إشارة $\left(\frac{\Delta}{f} - \frac{c}{f}\right)$ هي إشارة الجداء $(\Delta + 4)(\Delta + 2)$ الذي هو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه (-4) و (-2) ومعامل Δ^2 فيه هو $(+1)$

يبين الجدول التالي إشارة كل من $\frac{\Delta}{f}$ و Δ و $\left(\frac{\Delta}{f} - \frac{c}{f}\right)$ والنتائج الممكنة

ط	$\frac{\Delta}{f}$	Δ	$\frac{\Delta}{f} - \frac{c}{f}$	
$\infty -$	+	+	-	
4-	0-			يوجد حلان إشارتهما مختلفتان
	-	+	-	
2-				حل واحد موجب يساوي 2
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
$\frac{8}{5}-$	0-			حل مضاعف موجب يساوي 3
	+	-	+	لا توجد حلول
0	0-			حل مضاعف موجب يساوي 1
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
2	0-			حلان أحدهما معدوم والآخر
				$\frac{3}{2}$ موجب وهو $\frac{3}{2}$
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
$\infty +$				

جمل معادلات جمل متراجحات

1 - عموميات :

1.1 - الدوال العددية لمتغيرين حقيقيين :

تسمى كل دالة للمجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ في المجموعة \mathbb{R} دالة عددية لمتغيرين حقيقيين .

أمثلة :

(1) الدالة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ في المجموعة \mathbb{R} المعرفة كما يلي :

$$\text{تا } (s, e) = s^2 + e^2 - s + e + 1$$

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين s, e .

مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\text{لدينا مثلا : تا } (0, 1) = 1 + 0 + 1 - 0 + 1 = 2$$

$$\text{تا } (1, 0) = 1 + 1 + 0 - 1 + 0 = 1$$

(2) الدالة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ في المجموعة \mathbb{R} المعرفة كما يلي :

$$\text{ها } (s, e) = 3s - 2e + 5$$

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين s, e .

مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\text{لدينا مثلا : ها } (2, 1) = 3 \times 2 - 2 \times 1 + 5 = 7$$

$$\text{ها } (1, 4) = 3 \times 1 - 2 \times 4 + 5 = 0$$

(3) الدالة لا للمجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ في المجموعة \mathbb{R} المعرفة كما يلي :

$$\text{لا } (s, e) = \frac{s}{e} + \frac{e}{s} + 1$$

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين s, e .

مجموعة تعريفها هي $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{2}{1} - \frac{1}{2} = (2, 1) \text{ لا}$$

$$3 = 1 + 1 + 1 = (1, 1) \text{ لا}$$

2.1 - المعادلات ذات مجهولين حقيقيين :

نسمي معادلة ذات المجهولين الحقيقيين s, c كل معادلة من الشكل
 تا $(s, c) = 0$ حيث c دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين
 s, c .

إذا كان تا (s, c) كثير حدود من الدرجة الأولى نسمي المعادلة
 تا $(s, c) = 0$ معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين s, c .
 نسمي حلاً للمعادلة تا $(s, c) = 0$ كل ثنائية (s_0, c_0) من
 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ تحقق المساواة تا $(s_0, c_0) = 0$.
 حل المعادلة تا $(s, c) = 0$ هو تعيين مجموعة حلولها.

أمثلة :

$$(1) \text{ في } \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ المعادلة } s^2 + c^2 - 2s + 4c = 0$$

هي معادلة ذات المجهولين الحقيقيين s, c .

الثنائية $(-1, -1)$ هي حل لهذه المعادلة

الثنائية $(0, 1)$ ليست حلاً لهذه المعادلة

$$(2) \text{ في } \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ المعادلة : } s + 2c - 3 = 0 \text{ هي معادلة من الدرجة}$$

الأولى ذات المجهولين الحقيقيين s, c .

الثنائية $(1, 1)$ هي حل لهذه المعادلة

الثنائية $(-1, 3)$ ليست حلاً لهذه المعادلة.

$$(3) \text{ لتكن ، في } \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ ، المعادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين}$$

$$s, c : 3s - c + 4 = 0 \quad (1)$$

يمكن كتابة (1) على الشكل $3 = ع + 4$
 مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة $ح$ حيث :
 $ح = \{ (س ، ع) \mid ع = 3 - س \}$

3.1 - المعادلات المتكافئة :

• تكون المعادلتان $0 = (س ، ع)$ و $0 = (س ، ع)$ متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

نكتب عندئذ : $0 = (س ، ع) \iff 0 = (س ، ع)$

• لتكن $ا$ و $ب$ دالتين عدديتين للمتغيرين الحقيقيين $س ، ع$ معرفتين على نفس المجموعة وليكن $ك$ عدداً حقيقياً غير معدوم .
 لدينا :

$0 = (س ، ع) \iff 0 = (س ، ع) + (س ، ع) = (س ، ع)$

$0 = (س ، ع) \iff 0 = (س ، ع) \times ك$

4.1 - جمل معادلتين :

لتكن $0 = (س ، ع)$ و $0 = (س ، ع)$ معادلتين للمجهولين $س ، ع$.

كل ثنائية $(س_0 ، ع_0)$ تحقق في آن واحد المساواتين

$0 = (س_0 ، ع_0)$ و $0 = (س_0 ، ع_0)$ تدعى حلاً للجملة

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (س ، ع) \\ 0 = (س ، ع) \end{array} \right.$$

حل هذه الجملة هو إيجاد مجموعة حلولها .

تكون جملتان متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

من الواضح أنه إذا كانت لدينا جملة معادلتين وبدلنا إحدى المعادلتين بمعادلة مكافئة لها نحصل على جملة مكافئة للجملة الأولى .

$$\text{مثلا : } \left\{ \begin{array}{l} 2s - 1 = 5 \\ 0 = 5 + s^2 + 2s \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2s - 1 = 5 \\ 0 = 1 + s - 2s \end{array} \right\}$$

زيادة على ذلك توجد قواعد تسمح بتبديل جملة مفروضة بجملة مكافئة لها .
وننص فيما يلي على قاعدتين من هذه القواعد وهما قاعدة التعويض (أو طريقة
التعويض) وقاعدة الجمع (أو طريقة الجمع)

2. حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى لمجهولين

1.2. طريقة التعويض

قاعدة :

$$\text{في المجموعة } C \times C, \text{ إذا كانت } 0 \neq 0 \text{ فإن}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a's + b'c + c' = 0 \\ a's + b'c + c' = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a's + b'c + c' = 0 \\ (a' - a)s - (b' - b)c = c' - c \end{array} \right\}$$

$$0 = c' + (a' - a)s - (b' - b)c$$

$$\text{مثلا : حل في } C \times C \text{ الجملة التالية : } \left\{ \begin{array}{l} 2s - 3 = 5 \\ 0 = 1 + s - 2s \end{array} \right\}$$

حسب ما سبق :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2s - 3 = 5 \\ 0 = 1 + (3 - s) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2s - 3 = 5 \\ 0 = 1 + 3 - s \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2s - 3 = 5 \\ 0 = 14 - s \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2s - 3 = 5 \\ 2 = s \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 5 \\ 2 = s \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $\{(2, 1)\}$

2.2 . طريقة الجمع :

قاعدة :

$$\text{إذا كان } \alpha, \beta \text{ عددين حقيقيين حيث } \alpha \neq 0 \text{ فإن}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\alpha + \beta + \gamma) \alpha \\ 0 &= (\alpha + \beta + \gamma) \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta + \gamma \\ 0 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned} \right\}$$

$$\text{مثلا : حل في ح } \times \text{ ح الجملة التالية : } \left. \begin{aligned} 0 &= 1 - 5 + 3 \\ 0 &= 7 + 3 + 2 \end{aligned} \right\}$$

لدينا :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (7 + 3 + 2) 3 - (1 - 5 + 3) 2 \\ 0 &= 7 + 3 + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= 1 - 5 + 3 \\ 0 &= 7 + 3 + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 21 - 9 - 6 - 2 - 10 + 6 \\ 0 &= 7 + 3 + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 23 &= 6 \\ 0 &= 7 + 3 + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 23 &= 6 \\ 38 &= - \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

اذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $\{(23, -38)\}$

3.2 - طريقة المحدد

لتكن جملة المعادلتين من الدرجة الأولى للمجهولين الحقيقيين س ، ع

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta + \gamma \\ 0 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned} \right\}$$

لحل هذه الجملة يمكن استعمال إحدى الطريقتين (التعويض أو الجمع)
اللتين تم عرضهما في الفقرة السابقة ؛ ونقدم فيما يلي طريقة أخرى لدراسة
هذه الجملة في حالة :

$$(f, b) \neq (0, 0) \text{ و } (f, b') \neq (0, 0)$$

في المستوي المنسوب إلى معلم (م . و . س)
المعادلة $f = s + b + c = 0$ حيث $(f, b) \neq (0, 0)$
هي معادلة لمستقيم (Δ) والمعادلة $f' = s + b' + c' = 0$
حيث $(f', b') \neq (0, 0)$ هي معادلة لمستقيم (Δ') .

الشعاع $\vec{S} \left(\begin{matrix} -b \\ f \end{matrix} \right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

والشعاع $\vec{S}' \left(\begin{matrix} -b' \\ f' \end{matrix} \right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ')

تكون الثنائية (س ، ع) حلاً للجملة ،

$$\left. \begin{aligned} f &= s + b + c = 0 \\ f' &= s + b' + c' = 0 \end{aligned} \right\}$$

إذا وفقط إذا كان (س ، ع) احداثي نقطة مشتركة للمستقيمين (Δ) و (Δ') .

نعلم أن المستقيمين (Δ) و (Δ') يتوازيان إذا وفقط

$$\text{إذا كان المحدد } \begin{vmatrix} b & f \\ b' & f' \end{vmatrix} \text{ معدوماً}$$

ويتقاطعان ، إذاً . إذا وفقط إذا كان هذا المحدد غير معدوم .

الناقشة :

(1) إذا كان $0 \neq \begin{vmatrix} \hookrightarrow & \uparrow \\ \hookrightarrow & \uparrow \end{vmatrix}$ فإن المستقيمين (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة واحدة إحداثياتها $(س، ع)$.

إن حساب $س$ و $ع$ باستعمال إحدى الطريقتين (التعويض أو الجمع) يعطي :

$$\begin{vmatrix} \uparrow & \hookrightarrow \\ \uparrow' & \hookrightarrow' \end{vmatrix} = ع \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} \hookrightarrow & \uparrow \\ \hookrightarrow' & \uparrow' \end{vmatrix} = س$$

$$\begin{vmatrix} \hookrightarrow & \uparrow \\ \hookrightarrow & \uparrow \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \hookrightarrow & \uparrow \\ \hookrightarrow & \uparrow \end{vmatrix}$$

(2) إذا كان $0 = \begin{vmatrix} \hookrightarrow & \uparrow \\ \hookrightarrow & \uparrow \end{vmatrix}$ يكون المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيين .

يوجد عندئذ عدد حقيقي غير معدوم λ حيث :

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}' \text{ أي } \lambda = \lambda' \text{ و } \vec{\lambda} = \vec{\lambda}'$$

- إذا كان $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}'$ فإن المعادلتين $\hookrightarrow + ع + س = 0$ و $\uparrow + س + ع = 0$ هما معادلتان لنفس المستقيم .
وتكون عندئذ مجموعة حلول الجملة هي مجموعة حلول إحدى المعادلتين
- إذا كان $\vec{\lambda} \neq \vec{\lambda}'$ يكون المستقيمان المتوازيان (Δ) و (Δ') متمايزين تقاطعهما هو المجموعة الخالية والجملة ، عندئذ ، ليس لها حل .

الخلاصة :

لتكن ، في $ح \times ح$ ، جملة المعادلتين من الدرجة الأولى للمجهولين
س ، ع :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= ح + ع + اس \\ 0 &= ح' + ع' + اس' \end{aligned} \right\} (1)$$

• إذا كان : $اس - اس' = ع - ع' \neq 0$ فإن الجملة (1) تقبل حلاً واحداً

• إذا كان $اس - اس' = ع - ع' = 0$ فإن الجملة (1) :

إما ليس لها حل . وإما لها عدد غير منته من الحلول .

مثال 1 :

لتكن ، في $ح \times ح$ ، الجملة

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 10 - ع + 2س \\ 0 &= 15 - ع + 3س \end{aligned} \right\}$$

$$\text{لدينا : } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 -$$

بما أن محدد الجملة غير معدوم فهي ، إذاً ، تقبل حلاً واحداً .

حساب س ، ع :

$$3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 - \\ 3 & 15 - \end{vmatrix}}{5 -} = ع \quad ; \quad 4 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - & 2 \\ 15 - & 1 \end{vmatrix}}{5 -} = س$$

الحل الوحيد للجملة هو الثنائية (3 ، 4)

مثال 2 :

لتكن ، في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ، الجملة

$$\left. \begin{aligned} 4س - 6ع &= 2 \\ 2س - 3ع &= 1 \end{aligned} \right\}$$

لدينا :

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad 4س - 6ع &= 2 \\ (2) \quad 2س - 3ع &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 4س - 6ع &= 2 \\ 2س - 3ع &= 1 \end{aligned} \right\}$$

لنحسب محدد الجملة السابقة :

$$0 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \text{ لدينا :}$$

فالجملة إذاً إما ليس لها حل و إما لها عدد غير منته من الحلول .

نلاحظ أن :

$$(1) \Leftrightarrow 2س - (2س - 3ع + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 + 3ع$$

$$\Leftrightarrow (2)$$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي مجموعة حلول المعادلة (2)

وهي :

$$\left\{ (س، ع) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : س = \frac{1-3ع}{3} \right\} = (س)$$

مثال 3 :

لتكن ، في $ح \times ح$ ، الجملة

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 2 - ع + س \\ 0 &= 1 + ع - 3س \end{aligned} \right\}$$

لنحسب محدد هذه الجملة

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1- \\ 6- & 3 \end{vmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

فالجملة ، إذاً ، إما ليس لها حل وإما لها عدد غير منته من الحلول

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 6 + ع - 3س \\ 0 &= 1 + ع - 3س \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= 2 - ع + س \\ 0 &= 1 + ع - 3س \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 6- &= ع - 3س \\ 1- &= ع - 3س \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

من الواضح أنه لا يمكن أن يكون $(3س - 6ع)$ مساوياً في آن واحد $(1-)$ و $(6-)$ إذن الجملة المعطاة ليس لها حل .

3 - حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهولين

1.3 - المتراجحات من الدرجة الأولى ذات المجهولين

• نسمي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهولين الحقيقيين

س ، ع كل متراجحة من الشكل $0 < (س ، ع)$

$$\left(\begin{aligned} &0 \leq (س ، ع) \text{ أو } 0 < (س ، ع) \text{ أو } 0 \leq (س ، ع) \end{aligned} \right)$$

حيث تا (س ، ع) هو كثير حدود من الدرجة الأولى للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

• نسمي حلا للمتراجحة تا (س ، ع) $0 < (س ، ع)$ كل ثنائية (س₀ ، ع₀) من $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ تحقق المتباينة تا (س₀ ، ع₀) $0 < 0$.

• حل المتراجحة تا (س ، ع) $0 < 0$ هو تعيين مجموعة حلولها .
مثال :

في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ، المتراجحة $3س + ع - 4 > 0$ هي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع .
الثنائية (0 ، 1) هي حل لهذه المتراجحة .
الثنائية (2 ، 1) ليست حلا لهذه المتراجحة .
يمكن كتابة المتراجحة $(3س + ع - 4 > 0)$ على الشكل :

$$ع > 4 - 3س$$

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجموعة \mathcal{H} حيث

$$\mathcal{H} = \{ (س ، ع) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : س \in \mathcal{H} \text{ و } ع > 4 - 3س \}$$

2.3- إشارة (س + ب + ع + ح)

المستوي منسوب إلى معلم (م ، و ، ي) .

ا ، ب ، ح ثلاثة أعداد حقيقية حيث $(ا ، ب) \neq (0 ، 0)$.

لتكن الدالة تا للمستوي في \mathbb{C} التي ترفق بكل نقطة z (س ، ع) العدد

$$\text{الحقيقي تا}(z) = ا + ب + ع + ح$$

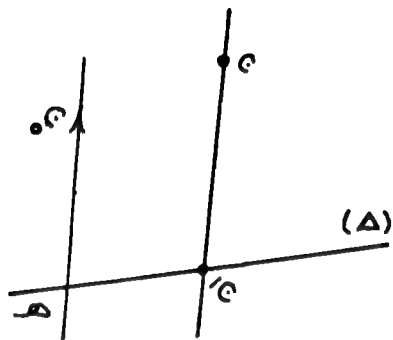
• لندرس إشارة تا (z) حسب وضعية النقطة z في المستوي .

مجموعة النقط z حيث تا (z) = 0 هي المستقيم (Δ) الذي

$$\text{معادلته : } ا + ب + ع + ح = 0$$

الشعاع $\overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

لتكن $ه$ نقطة من المستقيم (Δ) و
 $ه_0$ نقطة من المستوي لا تنتمي إلى
 (Δ) . (الشكل 1)



ولتكن $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ مركبي $\overrightarrow{ش_0}$.

$$\text{لدينا : } 0 \neq \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

أي $\alpha + \beta \neq 0$ لأن $\overrightarrow{ش_0}$ لا يوازي $\overrightarrow{ش}$ (الشكل 1)

من أجل كل نقطة $ه$ من المستوي ، المستقيم الذي يشتمل $ه$ ويوازي $\overrightarrow{ش_0}$
يقطع (Δ) في نقطة $ه'$ (س' ، ع') .

$$\text{من تا (ه) } 0 = \alpha + \beta + \epsilon' + \delta' = 0$$

$$\text{و } \overrightarrow{ش_0} = \lambda \overrightarrow{ش} \text{ نستنتج :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \lambda + \delta' = \delta \\ \beta \lambda + \epsilon' = \epsilon \end{array} \right\} \text{ أي } \left. \begin{array}{l} \alpha \lambda = \delta' - \delta \\ \beta \lambda = \epsilon' - \epsilon \end{array} \right\}$$

إذن :

$$\text{تا (ه) } \alpha + \beta + (\beta \lambda + \epsilon') + (\alpha \lambda + \delta') = 0$$

$$(\alpha + \beta + \epsilon' + \delta') + (\beta \lambda + \alpha \lambda) = 0$$

$$(\alpha + \beta) \lambda = 0$$

بما أن $(\alpha + \beta) \neq 0$ عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن إشارة λ هي التي
تحدد إشارة تا (ه) .

إذا كان Π_1 نصف المستوي المفتوح الذي يشمل \mathcal{H}_0 والمحدد بالمستقيم (Δ) و Π_2 نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ) .
فإن العلاقة $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \iff \lambda = 0$ تبين ما يلي :

$$\bullet \lambda = 0 \iff \mathcal{H}_0 \ni (\Delta)$$

$$\bullet 0 < \lambda \iff \mathcal{H}_0 \ni \Pi_1$$

$$\bullet 0 > \lambda \iff \mathcal{H}_0 \ni \Pi_2$$

ومنه النتيجة التالية

لا تتغير إشارة العدد λ (\mathcal{H}_0) لما تتغير النقطة \mathcal{H}_0 في أحد نصفي المستوي المفتوحين المحددين بالمستقيم (Δ)

مثال : إشارة $(2س + 3ع + 1)$

من أجل المبدأ م للمعلم الذي احداثياته $(0, 0)$ لدينا

$$\text{تا } (م) = 1 \quad \text{إذن تا } (م) < 0$$

وبالتالي يكون $(2س + 3ع + 1)$ موجباً تماماً من أجل كل نقطة تنتمي

إلى نصف المستوي المفتوح الذي يشمل م والمحدد بالمستقيم (Δ) الذي

$$\text{معادلته } 2س + 3ع + 1 = 0.$$

ويكون $(2س + 3ع + 1)$ سالباً تماماً من أجل كل نقطة تنتمي إلى

نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ)

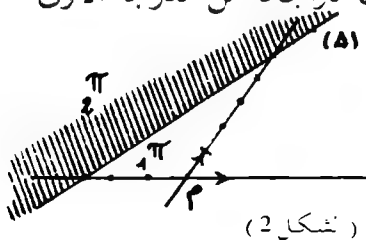
3.3 - الحل البياني لمتراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهولين

حسب ما سبق فإن التمثيل البياني لمجموعة حلول متراجحة من الدرجة الأولى

ذات مجهولين هو نصف مستوي .

مثال :

التمثيل البياني لمجموعة حلول



(شكل 2)

المتراجحة : $2س - ع + 5 < 0$

ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : $2س - ع + 5 = 0$
وليكن Π_1 نصف المستوي المفتوح الذي يشمل المبدأ م والمحدد بالمستقيم
 (Δ) و Π_2 نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ)
(الشكل 2) .

لنضع تا $(\varnothing) \equiv 2س - ع + 5$.

لدينا : تا $(م) = 5 + 0 - 0.2 = 5 + = 5$ إذن تا $(م) < 0$
تمثل مجموعة حلول المتراجحة المقترحة بنصف المستوي Π_1 غير المشطوب في
الشكل 2

4.3 - الحل البياني لجملة متراجحات من الدرجة الأولى لمجهولين

لتكن الجملة :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ 'س + م + ع + ح } \leq 0 \\ (2) \text{ 'س + م' + ع + ح' } > 0 \end{array} \right\}$$

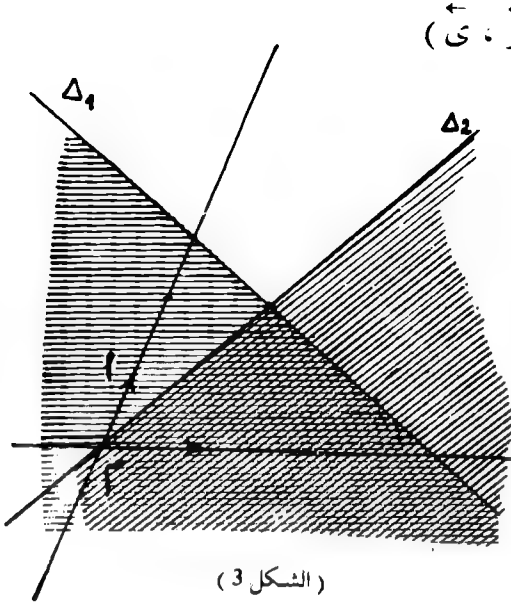
مجموعة حلول الجملة هي مجموعة الثنائيات $(س . ع)$ التي تحقق .
في آن واحد ، (1) و (2) .
نعلم أن :

مجموعة حلول المتراجحة (1) ممثلة بنصف مستو مغلق $ح_1$ و مجموعة حلول
المتراجحة (2) ممثلة بنصف مستو مفتوح $ح_2$.
وبالتالي :

تكون مجموعة حلول الجملة المقترحة ممثلة بالمجموعة $ح_1 \cap ح_2$.

مثال :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ س + ع - 3 } \leq 0 \\ (2) \text{ 2س - ع } > 0 \end{array} \right\}$$
 الحل البياني للجملة



المستوي منسوب إلى المعلم (م . و . ي)

• مجموعة حلول المتراجحة (1)

ممثلة بنصف مستو مغلق حدّه

المستقيم (Δ_1) الذي معادلته

$$0 = 3 - ع + س$$

(الشكل 3)

الثنائية $(0, 0)$ ليست حلاً

للمتراجحة (1).

لنشطب إذاً نصف المستوي

المفتوح المحدّد بالمستقيم (Δ_1)

الذي يشمل المبدأ م

هذا نصف المستوي المشطوب يمثل مجموعة الثنائيات التي ليست حلولاً

للمتراجحة (1).

• مجموعة حلول المتراجحة (2) ممثلة بنصف مستو مفتوح حدّه المستقيم

$$(\Delta_2) \text{ الذي معادلته } 0 = ع - 2س$$

الثنائية $(1, 0)$ حل للمتراجحة (2).

لنشطب إذاً نصف المستوي المغلق المحدّد بالمستقيم (Δ_2) والذي لا

يشمل النقطة $(1, 0)$.

هذا نصف المستوي المشطوب يمثل مجموعة الثنائيات التي ليست حلولاً

للمتراجحة (2).

• مجموعة حلول الجملة ممثلة بتقاطع نصفي المستوي اللذين يمثلان حلول

المتراجحتين على الترتيب وهو الجزء غير المشطوب في الشكل.

تمارين

كثيرات الحدود :

1. أنجز العمليات التالية على وحيدات الحد للمتغير س
ثم عَيِّن ، في كل حالة ، درجة وحيد الحد الناتج :

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right)$$

$$-7س^2 + \frac{1}{3}س^2 - \frac{2}{5}س^2 \cdot \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{50}س^2$$

2. (1) بسط ورتب كثيرات الحدود تا (س) ، ها (س) ، عا (س) التالية :

$$\text{تا (س)} = \frac{1}{2}س^4 + 2س^3 + 1س^3 - 2س^2$$

$$\text{ها (س)} = 5س^2 - 1س^2 + 5س - 5س^2$$

$$\text{عا (س)} = \sqrt[3]{3}س + 5س - 5س^2 - \sqrt[3]{2}س + 1$$

(2) احسب ورتب المجاميع التالية :

$$\bullet \text{ تا (س)} + \text{ها (س)} + \text{عا (س)}$$

$$\bullet \text{ تا (س)} - \text{ها (س)} + \text{عل (س)}$$

$$\bullet - \text{تا (س)} + \text{ها (س)} - \text{عا (س)}$$

3. تا (س) ، ها (س) ، عا (س) كثيرات حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = 3س^3 + 3س^2 - 7س + 5$$

$$\text{ها (س)} = 2س^3 - 3س^2 + 2س - 1$$

$$\text{عا (س)} = 3س^3 + 5س - 2$$

أحسب ورتب كثيرات الحدود التالية :

$$\text{ك (س)} = 2س + 2س + \text{ها (س)} - \text{عا (س)}$$

$$\text{ل (س)} = 2س + 2س + \text{عا (س)} - \text{تا (س)}$$

$$\text{ط (س)} = 2س + 2س + \text{تا (س)} - \text{ها (س)}$$

$$\text{م (س)} = \text{تا (س)} + \text{ها (س)} + \text{عا (س)}$$

$$\text{ه (س)} = \text{ك (س)} + \text{ل (س)} + \text{ط (س)}$$

4. تا (س) ، ها (س) ، عا (س) كثيرات حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = 2\text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 5$$

$$\text{ها (س)} = \frac{1}{2}\text{س}^3 + 2\sqrt{3}\text{س}^2 + 3\text{س} - 1$$

$$\text{عا (س)} = -\sqrt[3]{3}\text{س}^3 + \frac{5}{2}\text{س}$$

$$\text{أحسب تا (1-)} ؛ \text{ها (2-}\sqrt{2}\text{)} ؛ \text{عا (}\frac{2}{\sqrt[3]{-3}}\text{)}$$

5. أحسب الجداءات التالية :

$$(8\text{س}^4 + 7\text{س}^2 - 1)(2\text{س}^2 + \text{س} - 1)$$

$$(2\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 1)(\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + \text{س} + 1)$$

$$(1\text{س}^2 + \text{س} + 1)(\text{س}^2 - \text{س} + 1)(\text{س}^2 - 1)$$

6. حلل كلا من كثيرات الحدود التالية :

$$(1) (7\text{س} - 1)^2 - (7\text{س} - 1)(3\text{س} + 2)$$

$$(2) (4\text{س} - 3)(3\text{س} + 2) - (2\text{س} - 1)(3\text{س} - 4)$$

$$(3) 2(4\text{س}^2 + 2\text{س}) + 3(2\text{س} + 1)$$

$$(4) \text{س}^2 - 9 - (4\text{س} + 5)(3\text{س} - 3)$$

$$(5) 4(4\text{س}^2 - 2) - (\text{س}^2 - 2)^2$$

$$(6) (5\text{س} - 10)(3\text{س} - 3) - (4\text{س}^2 - 3)$$

$$(7) (\text{س}^2 - 16)^2 - (4 + \text{س})^2$$

$$(8) 12\text{س}^3 - 16\text{س}^2 - (3\text{س} - 4)^2$$

$$(9) 2\text{س}^2 - 18 - (\text{س} + 3)^2 + 8\text{س} + 24$$

$$(10) 9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4 + (6\text{س} - 4)(\text{س} + 4) - 18\text{س}^2 + 8$$

$$(11) \text{ع}^2 - (\text{س} - 1)^2 - 2(\text{س} - 1)(\text{ع} + 1)$$

$$(12) \text{س}^2 + \text{ع}^2 + 2\text{ع} - \text{س} - 9 + 6\text{ع} - 6\text{س}$$

$$(13) (\text{ب} - \text{ا})(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) - (\text{ا} - \text{ب})(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)$$

$$(14) \text{ا}^2\text{س}^2 + \text{ع} + \text{ا} + \text{ع}^2 + \text{س}^2 + \text{ا} + \text{ب}^2\text{س}$$

$$(15) \quad 1 - 2^2 - 3^3 + 4^4$$

$$(16) \quad (س^3 - 8) + (س^2 - 4)$$

$$(17) \quad (س^3 - 8)(س^2 - 1) + 1$$

$$(18) \quad 2(س^6 - 6س^4 + 6س^2 - 2)$$

7. تا (س) و ها (س) كثيرا حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = (س^4 - 6س^3 + 13س^2 - 12س + 4)$$

$$\text{ها (س)} = (س^4 + س^2 + 1)$$

عين الأعداد الحقيقية 'ا' ، 'ب' ، 'ج' ، 'د' بحيث يكون :

$$٧س \ni ج : (س^2 + 1س + 2) = \text{تا (س)}$$

$$٧س \ni ج : (س^2 + 1س + 2) (س^2 + 1س + 2) = \text{ها (س)}$$

8. تا (س) كثير حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = (س^5 - 4س^3 + 5س + 10)$$

عين كثير الحدود ها (س) بحيث يكون :

$$٧س \ni ج : \text{تا (س)} = (س^2 + 2) \text{ها (س)}$$

9. تا (س) و ها (س) كثيرا حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = (س^3 - 13س^2 + 5س + 34)$$

$$\text{ها (س)} = (س^4 - س^2 + 2س - 1)$$

هل توجد أعداد حقيقية 'ا' ، 'ب' ، 'ج' ، 'د' بحيث يكون :

$$٧س \ni ج : (س^2 - 2) (س^2 + 1س + 2) = \text{تا (س)}$$

$$٧س \ni ج : (س^2 + 1س - 1) (س^2 + 2س + 2) = \text{ها (س)}$$

10. تا (س) كثير حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = (س^4 - س^3 + 2س^2 - 2)$$

أحسب تا (1) واستنتج تحليلاً لكثير الحدود تا (س) .

11. تا (س) كثير حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = (س^3 - 5س^2 + 18س)$$

أوجد كثير حدود ها (س) بحيث يكون :

$$٧س \ni ج \text{تا (س)} = (س^3 - 3) \text{ها (س)}$$

$$12. \text{ تا (س) كسر ناطق حيث تا (س) } = \frac{2س^2 - س - 1}{3س - 2}$$

- (1) عيّن مجموعة التعريف ف للدالة الناطقة تا
(2) عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون :

$$ص \div ف : \text{ تا (س) } = ا + س + ب + \frac{c}{3س - 2}$$

$$13. \text{ نفس التمرين السابق من أجل تا (س) } = \frac{2س^2 + 5س - 3}{3س - 2}$$

14. عيّن مجموعة التعريف لكل كسر من الكسور الناطقة التالية . ثم اختزل كلا منها :

$$(1) \frac{8س^2 + 2س - 15}{2س^2 + 3س} \quad (2) \frac{س^3 + 4س^2 + 4س}{8س^2 + 8س}$$

$$(3) \frac{س^3 + س^2 - 10س + 8}{(س - 2)(س - 1)}$$

$$(4) \frac{س^2}{6} - \frac{س - 3}{6} + \frac{س^2 - 1}{س + 1}$$

$$(5) \frac{س^3 + س^2 - 6س - 54}{س^2 + 2س - 9} - \frac{س + 12}{س^2 - 2س}$$

$$(6) \frac{7س + 6}{س^2 + 2س - 18} + \frac{س^2 - 2س - 18}{س^2 + 8س - 8} + \frac{س^2 - 3س}{س^2 - 4س}$$

$$(7) \frac{س + 1}{س - 3} \div 1 + 1$$

$$\frac{س + 1}{س - 3} \div 1 + 1$$

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

15. هل المعادلتان التاليتان ، في ح . متكافئتان ؟

$$س + \frac{3}{1-س} = \frac{3}{س^2}$$

$$س - \frac{3}{1-س} = \frac{3}{س^2}$$

16. نفس التمرين من أجل :

$$س^3 - 3س^2 + 2س = س(س - 1)$$

$$س^3 - 3س^2 + 2س = 1 - س$$

17. نفس التمرين من أجل :

$$س + \frac{س^3}{5} = 1 - س^2$$

$$5س + س^3 = 5(1 - س^2)$$

18. نفس التمرين من أجل :

$$س^2 - 3س = س$$

$$س^2 - 3س + \frac{1}{س} = \frac{1}{س} + س$$

19. نفس التمرين من أجل :

$$\sqrt{س + 1} = 1 - س$$

$$س + 1 = (1 - س)^2$$

20. هل المتراجحتان التاليتان في ح متكافئتان ؟

$$4س^2 - 2س > 2س^3 + 4س$$

$$2س^2 + س > 2س^3 - 2س$$

21. نفس التمرين من أجل :

$$4س^2 - 2س \geq 2س^3 + 4س$$

$$2س - 1 \geq 2س^2 + 2$$

22. نفس التمرين من أجل :

$$3 \leq 1 + \sqrt{4 - s} ; (3, 1 + s) \leq 4 - s^2$$

23. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

$$(1) \frac{(3 - s) 5}{4} = \frac{s}{2} + \frac{(1 - s) 3}{7}$$

$$(2) \frac{19 + s}{20} = \frac{1 + s}{2} + \frac{1 - s}{5} - \frac{1 + s}{4}$$

$$(3) \frac{(1 + s) 3}{5} - \frac{(3 - s) 2}{3} = \frac{1 - s}{5} - \frac{s}{3}$$

$$(4) 36 = \left(\frac{2 - s}{7} - s \right) - \frac{7 + s}{2}$$

$$(5) 2 - s = \sqrt{2 - (1 + \sqrt{2}) s}$$

$$(6) 2, 3 + (3 - s) 1, 4 = (1 + s) 3, 8 - 0, 2 s$$

24. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

$$(1) 0 = 9 + (2 - s) 3 + 2 s$$

$$(2) 1 - s^2 = 5 + (3 + s) s$$

$$(3) 5 s^2 = 3 s$$

$$(4) 4 - s^2 = (2 - s) 3$$

$$(5) 0 = (1 - s^2) + (1 - s)^2$$

$$(6) 0 = s^2 + 2 s^3 + s^4$$

25. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س :

$$(1) \frac{3 + s}{5 + s} = \frac{1 + s}{3 + s}$$

$$(2) 1 - \frac{1}{1 + s} = 2 - \frac{s^2}{1 + s}$$

$$\frac{3}{1+s} = \frac{1}{s^2-1} + \frac{2}{1-s} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(2+s)(1+s)} = \frac{1}{1+s} + \frac{1+s}{(2+s)^2} \quad (4)$$

26. حل . في ح . المتراجحات التالية ذات المجهول س .

$$\begin{aligned} (1) \quad 2 \leq 4 + 5 - 2 \quad (2) \quad 4 - 5 > 2 + 3 \\ (3) \quad 12 \geq 4 \quad (4) \quad 3 + 7 - 2 < 1 + 2 \\ (5) \quad 5 < 3 - (1 - 3) \quad (6) \quad 2 + 3 \leq 4 - 9 \end{aligned}$$

$$(7) \quad 3 + \frac{s}{2} < \frac{s}{10} - \frac{4}{5}$$

$$(8) \quad 2 - \frac{1+s}{3} > 1 - \frac{2+s}{2}$$

27. حل . في ح . المتراجحات التالية ذات المجهول س .

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 > (3+s)(2-s) \quad (2) \quad 5 - s^2 \leq 0 \\ (3) \quad 4 < s^2 \quad (4) \quad 0 < (9 - s^2) \end{aligned}$$

$$(5) \quad 0 < \frac{3-s}{1+s} \quad (6) \quad 3 > \frac{2+s}{s}$$

$$(7) \quad 0 \geq \frac{2+s}{3-s} \quad (8) \quad 2 < \frac{3-s}{3+s}$$

$$(9) \quad 4 \leq |1-s| \quad (10) \quad 5 + s > \frac{3}{4} + |s|$$

28. حل . في ح . جمل المتراجحات التالية ذات المجهول س .

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & \left. \begin{aligned} 2 < 3 + s \\ 4 < 5 - s \end{aligned} \right\} \\ (2) \quad & \left. \begin{aligned} 2 > 3 + s \\ 2 - s > 4 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 < 1 + 2س \\ 5 > س \\ 2 - 7 > 3س \end{array} \right\} (4) \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq 1 - 3س \\ 2س > 3س - 5 \end{array} \right\} (3)$$

29. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

والوسيط الحقيقي ط

$$(1) ط س = ط + 1$$

$$(2) ط س - 1 = س + \sqrt{2}$$

$$(3) 2 ط س + 3 = 6 ط + س$$

$$(4) 4 - ط^2 = س (2 - ط)$$

$$(5) ط^2 س - ط^2 = س$$

$$(6) س - \frac{1}{ط} = س + \frac{س}{ط}$$

$$(7) 1 = \frac{2}{ط} - \frac{1}{س}$$

$$(8) \frac{س + ط^2}{1 - س^2} = \frac{ط}{1 - س}$$

$$(9) \frac{ط^2}{ط^2 س - 2} = \frac{س}{ط + س} + \frac{س}{ط - س}$$

30. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

والوسيط الحقيقي ط

$$(5) 1 \geq \frac{1 - 3س}{3} - \frac{1 + س}{ط}$$

$$(1) ط س < 2 + س$$

$$(2) ط^2 س > 2 + 3$$

$$(6) \frac{1 + س}{ط + 1} \geq \frac{2س}{(1 + ط)^2}$$

$$(3) 2 ط س + 3 > 6 ط + س$$

$$(4) 2 ط س + 3 \leq ط + 6$$

$$(7) \frac{1}{2} + \frac{1 + س}{ط 2} \geq 3س - \frac{2س}{ط}$$

المعادلات والمترجمات من الدرجة الثانية :

31. حل . في ح . كلا من المعادلات التالية ذات المجهول س :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 9س^2 = 7 & (7) \quad 8س^2 - 2 = 0 \\ (2) \quad 9 = \frac{س^2}{25} & (8) \quad 4س^2 - 5 = 70 + س^2 \\ (9) \quad 16 = (س + 3)(س - 3) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (3) \quad 4 = (س + \sqrt{2})^2 & (10) \quad 5س^2 - 3س = 0 \\ (4) \quad 16 = (س - 4)^2 & (11) \quad 2س^2 + 4س = 7 \\ (5) \quad 7 = (س + 2)^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (6) \quad 3 = (س - \sqrt{2})^2 & (12) \quad 0 = 6 + (س - 2)(س + 3) \\ (13) \quad 9 - س = (س + 3)(س - 3) & \end{array}$$

32. اكتب كلاً من كثيرات الحدود التالية على شكلها النموذجي . ثم عيّن مجموعة

جذور كل من هذه كثيرات الحدود

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 9س^2 - 24س + 1 & (2) \quad 6س^2 - س + 1 \\ (3) \quad 12س^2 + 4\sqrt{6}س + 2 & (4) \quad 5س^2 + 9س - 5 \\ (5) \quad 3س^2 + س - 4 & (6) \quad 5س^2 + 10\sqrt{2}س - 10 \\ (7) \quad 3س^2 + س + 2\sqrt{5}س + 5 & (8) \quad 2س^2 - 3س - 20 \end{array}$$

33. حل . في ح . باستعمال القوانين . كلا من المعادلات التالية ذات المجهول س .

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 0 = \frac{5}{2} + س - \frac{س^2}{2} & (2) \quad 0 = \left(3 + \frac{س}{2} - \right) + 9 + \frac{س}{5} \\ (3) \quad 1 - س = 4س^2 - 4س + 4 & (4) \quad 21 = 4س^2 + س \\ (5) \quad 0 = 5س^2 + س + 3 & (6) \quad 9 - س = 12س^2 + 4س \end{array}$$

$$(7) \quad 5 \text{ س } 7 - 2 = 34 - 0$$

$$(8) \quad 4 = 2\sqrt{\text{س} + 2}$$

$$(9) \quad 0 = 1 + 2\sqrt{\text{س} + 2}$$

$$(10) \quad 0 = 5 + 5\sqrt{\text{س} + 4}$$

$$(11) \quad 2\sqrt{2 - 6} = \text{س} (2\sqrt{+1}) - 2$$

$$(12) \quad 0 = 1 + \text{س} (2\sqrt{+1}) + 2$$

34. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

$$(1) \quad 0 = 14 + (5 - \text{س}) (3 + \text{س})$$

$$(2) \quad 0 = (1 - \text{س})^2 + (3 + \text{س})^2$$

$$(3) \quad 0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{س} \right)^2 + (1 - 2\text{س})^2$$

$$(4) \quad 2 - 3 = 8 = (1 - 2\text{س})^3$$

$$(5) \quad (1 - \text{س}) (3 + 2\text{س} + \text{س}^2) = \text{س}^3 - 3$$

$$(6) \quad 22 + 33\text{س} = 14\text{س}^2 - (2\text{س} - 11) (5 + 4\text{س})$$

35. عَيِّن مجموعة تعريف كل كسر من الكسور الناطقة التالية . ثم اختزل كلا منها :

$$(2) \quad \frac{\text{س}^2 - 3}{\text{س}^2 - 5 + 6}$$

$$(1) \quad \frac{6\text{س}^2 + 5\text{س} - 6}{4\text{س}^2 - 9}$$

$$(4) \quad \frac{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5}{25 + 20\text{س} - 4\text{س}^2}$$

$$(3) \quad \frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 2}{2 + 5\text{س} - 2\text{س}^2}$$

$$(6) \quad \frac{\text{س}^3 - 8}{2 - 5\text{س} - 3\text{س}^2}$$

$$(5) \quad \frac{2\text{س}^2 + 4\text{س} - 6}{6 + \text{س} - 2\text{س}^2}$$

$$(8) \quad \frac{2\text{س}^2 + 2\sqrt{\text{س}} - 2}{2 - \text{س}^2}$$

$$(7) \quad \frac{1 - 2\text{س} + \text{س}^2}{1 + 2\sqrt{\text{س} - 2}}$$

36. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

$$(1) \quad (1 + \text{س}) (3 + 2\text{س}) = (1 + \text{س}) (5 - \text{س}^2)$$

$$(2) \quad 0 = 2\text{س}^4 + \text{س}^3 - 2\text{س}$$

$$(3) \quad (2 + 3س)^2 = (3 - 4س)^2 - (1 - 7س)^2$$

$$(4) \quad (1 - س)^3 + (2 - س)^3 = (2 + س)^3 + (1 + س)^3$$

$$(5) \quad (4 + 9س - 2س^2)^2 = (4 - 7س - 2س^2)^2$$

$$(6) \quad 0 = (2 + س)(1 - س) + 1 - 3س$$

$$(7) \quad 2س - س^2 = 1 - 4س + 4س^2 - 3س^3$$

37. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

$$(1) \quad 0 = \frac{3 - 5س + 2س^2}{2 - س + 3س^2} \quad (2) \quad 0 = \frac{15 - س + 2س^2}{5 + 2س^2}$$

$$(3) \quad 0 = \frac{2 - 2\sqrt{2}س - 2س^2}{2\sqrt{2} - س(1 - 2\sqrt{2}) + 2س^2} \quad (4) \quad 0 = \frac{4 + 2س - 2س^2 + 3س^3 - 3س^4}{1 - س + 2س^2 - 3س^3}$$

$$(5) \quad \frac{1 - 3س}{3 - س} = \frac{2 - س}{1 + 2س} \quad (6) \quad 8 = \frac{1}{2 - س} + \frac{1}{1 - س}$$

$$(7) \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{(1 + س)4} - \frac{3}{(1 - 2س)^2}$$

$$(8) \quad \frac{1}{1 - س} = \frac{1}{2 + س} + \frac{3}{2 - س + 2س^2}$$

$$(9) \quad \frac{12}{8 - 3س} = \frac{8 + 7س}{4 + 2س + 2س^2} + \frac{1}{2 - س}$$

$$(10) \quad 1 = \frac{1 - 4س}{2 - س} - \left(\frac{1 - 2س}{2 - س} \right)^2$$

38. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 &= |س| + 2 \quad (2) \quad 0 = 1 - |س| \quad (3) \quad 0 = |س| + |س - 1| \quad (4) \quad 0 = |س - 5| + |س - 25| \\ (5) \quad 0 &= |س - 5| - |س - 25| \end{aligned}$$

39. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

$$\begin{aligned} (1) \quad 2 + س &= \sqrt{1 - س^2} \quad (2) \quad 3 - س = \sqrt{1 + س^2} \\ (3) \quad 1 - \frac{س}{2} &= \sqrt{4 - س^2} \quad (4) \quad س = \sqrt{4 + س^2} \\ (5) \quad |س| &= \sqrt{4 + س^2} \end{aligned}$$

40. ادرس إشارة كل من كثيرات الحدود التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad 3 - س^2 \quad (2) \quad س^2 + 7س \quad (3) \quad (س - 2) + 5 \quad (4) \quad 2س^2 + 6س - 1 \\ (5) \quad 4س^2 - 4س + 3 \quad (6) \quad 2س^2 + س - 1 \quad (7) \quad -س^2 + 2س + 15 \\ (8) \quad 3س^2 - 10س + 3 \quad (9) \quad -س^2 + 2س - 15 \end{aligned}$$

41. ادرس إشارة كل من الجداءات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad (س + 2) (س - 2) \quad (2) \quad (س - 2) (س^2 - 5س + 6) \\ (3) \quad (س - 2) (س^2 - 2س - 1) \quad (4) \quad (س - 2) (س^2 - 2س + 1) \\ (5) \quad (س - 2) (س^2 - 5س + 6) \end{aligned}$$

42. ادرس إشارة كل من الكسور الناطقة التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1 - س}{س^2 - 2س - 3} \quad (2) \quad \frac{س^2 + 2س - 3}{س^2 - 2س} \\ (3) \quad 2 - س + \frac{س}{1 + س} \end{aligned}$$

43. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 0 < \text{س}^2 + \text{س} \\
 (2) \quad & 4 < \text{س}^2 \\
 (3) \quad & \text{س}^2 > \text{س} \\
 (4) \quad & 0 \leq 1 + \text{س} - 6\text{س}^2 \\
 (5) \quad & 0 > 7 + \text{س} - 2\text{س}^2 \\
 (6) \quad & (1 - \text{س})^2 > (3 - \text{س})^2 \\
 (7) \quad & 0 > (1 - \text{س}^2) + 4(1 + \text{س}) \\
 (8) \quad & 0 \geq \text{س} + 4 - 2\text{س}^2 \\
 (9) \quad & (2 - \text{س})(10 - \text{س}) > (6 - \text{س})^2 \\
 (10) \quad & 0 < (1 - \text{س}) - \frac{3(1 - \text{س})^2}{2} \\
 (11) \quad & 2\text{س}^2 + \frac{1}{5}\text{س} \geq \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

44. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (1 - \text{س})(\text{س}^2 + 2)(\text{س}^2 - 9) < 0 \\
 (2) \quad & 0 \geq (\text{س}^2 - \text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 1) \\
 (3) \quad & 0 \geq \text{س}(1 + \text{س})^2(\text{س}^2 - \text{س} - 6) \\
 (4) \quad & 0 < (\text{س}^2 - 4)(\text{س}^2 - 5\text{س} + 6) \\
 (5) \quad & 0 > (\text{س}^2 - 5\text{س} + 6)(\text{س}^2 + 3\text{س} + 2)
 \end{aligned}$$

45. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 0 < \frac{\text{س}}{\text{س} + 4} \\
 (2) \quad & 0 \geq \frac{1 + \text{س}}{3 - \text{س}} \\
 (3) \quad & 4 < \frac{3 + \text{س}}{1 - \text{س}} \\
 (4) \quad & \frac{3}{2 - \text{س}} < \text{س} \\
 (5) \quad & \frac{1}{2 + \text{س}} > \frac{1 - \text{س}}{2\text{س}} \\
 (6) \quad & 0 > \frac{2\text{س}^2 - 2\text{س}}{1 + \text{س}} \\
 (7) \quad & 0 < \frac{5\text{س}^2 - \text{س}}{49 - (1 - \text{س})^2} \\
 (8) \quad & \frac{1 + \text{س}}{1 - \text{س}} \geq \frac{1 - \text{س}}{1 + \text{س}} \\
 (9) \quad & \frac{5}{3} < \frac{5\text{س}}{1 + 3\text{س}} \\
 (10) \quad & 1 < \frac{3 - 3\text{س}^2}{4 - \text{س}^2}
 \end{aligned}$$

46. حل ، في ح . كلا من الجمل التالية :

$$(1) \quad 4 > 4 + 3س^2 > 5 + 12 > 4 - (2) \quad 2 > \frac{1}{1-س}$$

$$(3) \quad \frac{س}{1-س} > 3 > \frac{2+س}{س} \quad (4) \quad 2 > \frac{1}{س} + س \geq 2 - \frac{3+س}{1-س}$$

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} 0 > 4 + 5س \\ 0 < 9 + 7س^2 \\ 0 < 15 - 3س \end{array} \right\} \quad (6) \quad \left. \begin{array}{l} 0 \geq \frac{س}{1-س} - \frac{3+س}{1-س} \\ 1 + س < \frac{1-س^2}{4-3س} \end{array} \right\}$$

47. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

$$(1) \quad |س - 3| > 1 \quad (2) \quad |س - 5| < 5$$

$$(3) \quad |س + 3| < |س - 2|$$

$$(4) \quad |س - 1| < (س + 1)(س - 2)$$

$$(5) \quad 1 > \frac{|س - 1|}{2 + |س|}$$

48. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

$$(1) \quad \sqrt{س} > 2 \quad (2) \quad \sqrt{س^2} > 4$$

$$(3) \quad \sqrt{س^2 - 4} \geq 0 \quad (4) \quad \sqrt{س^2 + 1} \geq 1$$

49. ط عدد حقيقي و تاو (س) كثير حدود حيث :

$$\text{تاو (س)} = (س^2 - 4)(س^2 - (س + 2)س + 1) - ط^2$$

(1) عيّن قيم ط بحيث يكون تاو (س) كثير حدود من الدرجة الثانية .

(2) عيّن قيم ط بحيث يكون :

(أ) تاو (س) كثير حدود من الدرجة الأولى

$$(ب) \quad \text{تاو (1)} = 0$$

$$(ح) \quad \text{تاو (0)} = 0$$

$$(د) \quad \text{تاو (2)} = 0$$

حل المعادلة تاو (س) = 0 في كل من الحالات الثلاث (أ) (ب) (ح)

50. ط عدد حقيقي و تا $\sqrt{2}$ (س) كثير حدود حيث :
- تا $\sqrt{2}$ (س) = (ط - 1) س 2 + 2 (ط + 3) س + ط
- (1) عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط بحيث يكون :
- تا $\sqrt{2}$ (س) موجبا من أجل س = 2 و سالبا من أجل س = -5
- (2) عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي س بحيث يكون تا $\sqrt{2}$ (س) موجبا و تا $\sqrt{2}$ (س) سالبا

51. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س والوسيط الحقيقي ط .

- (1) 3 س 2 - 27 = (س - 3) (ط س + 1)
- (2) س 2 - 1 = ط (س 2 + 1)
- (3) س 2 - 1 = 2 ط (س 2 + 1)
- (4) (س - 1) ط 2 = ط (س 2 - 1)
- (5) س 2 - 4 س + 2 - ط (س - 2) + ط 2 = 0

52. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س . والوسيط الحقيقي ط

- (1) ط س 2 + 2 س - ط < 0
- (2) ط س 2 - 2 س + 1 > 0
- (3) 2 س 2 + ط س - ط + 1 > 0
- (4) (ط س - 1) (س - 2) < 0

53. عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط بحيث يكون :
- (1) س \in ح : (ط - 5) س 2 - 2 (ط - 1) س + 2 (ط - 1) > 0
- (2) س \in ح : (ط + 5) س 2 + 4 (ط + 3) س + 3 < 0

54. عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتي لا يكون للمترابحة :

(ط - 5) س 2 - (ط + 4) س + 5 < 0 حل

55. ط عدد حقيقي و تا (س) كثير حدود حيث :

$$\text{تا (س)} = (س) (2 + ط) س^2 - 2 (ط - 1) س + ط - 2$$
 عيّن مجموعة قيم الوسيط ط بحيث تكون إشارة تا (س) ثابتة مهما كان العدد س .

ما هي عندئذ إشارة تا (س) ؟

56. نفس الاسئلة بالنسبة إلى كثير الحدود :

$$\text{تا (س)} = (س) (2 + ط) س^2 + ط (س) + ط - 1$$
 57. تحقق أن لكل معادلة من المعادلات التالية حلا هو أحد الأعداد : $1 - ، 1 + ، 2 - ، 2 +$

ثم احسب حلها الثاني :

$0 = 6 + س + س^2$ (2)	$0 = 8 - س + س^2$ (1)
$0 = 10 - س + س^2$ (4)	$0 = 5 - س + س^2$ (3)
$0 = 4 - س + س^2$ (6)	$0 = 3 - س + س^2$ (5)
$0 = 4 + س + س^2$ (8)	$0 = 4 + س + س^2$ (7)

58. لتكن المعادلة من الدرجة الثانية

$$س^2 - 7س - 4 = 0 \text{ و } س' ، س'' \text{ حلاها}$$

• احسب ما يلي :

$$(1) س' + س'' (2) س' . س'' (3) س'^2 + س''^2$$

$$(4) \frac{1}{س'} + \frac{1}{س''} (5) \frac{س''}{س'} + \frac{س'}{س''}$$

• عيّن معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين هما : $\frac{1}{س'}$ ، $\frac{1}{س''}$

59. ادرس ، حسب قيم العدد الحقيقي ط ، إشارة حلول كل من المعادلات التالية

$0 = 4 - ط + س$ (1)
$0 = 2 + ط + س$ (2)
$0 = 2س^2 + 5س - ط$ (3)

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{3+ع}{4} - \frac{1+س}{2} \\ 0 &= 1 - \frac{1-ع}{4} - \frac{1-س}{2} \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sqrt[3]{2+1} + ع (\sqrt[3]{2-1}) + س \\ 0 &= \sqrt[3]{2+4} + ع (2-س) (\sqrt[3]{2+1}) \end{aligned} \right\} (9)$$

62. ا) حل : في ح × ح ، الجملة التالية :

$$(1) \left. \begin{aligned} 0 &= 70 - ع + 2س \\ 0 &= 55 - ع - 3س \end{aligned} \right\}$$

ب) استعمل نتيجة السؤال السابق لحل الجملة التالية :

$$(2) \left. \begin{aligned} 70 &= ع^2 + 2س^2 \\ 55 &= ع^2 - 3س^2 \end{aligned} \right\}$$

63. نفس التمرين بالنسبة إلى الجملتين :

$$(1) \left. \begin{aligned} 0 &= 8 - ع + س \\ 0 &= 32 - ع + 3س \end{aligned} \right\}$$

$$(2) \left. \begin{aligned} 8 &= (2-ع)^2 + (3-س)^2 \\ 32 &= (2-ع)^2 + 3(3-س)^2 \end{aligned} \right\}$$

64. نفس القترين بالنسبة إلى الجملتين

$$\left. \begin{aligned} 15 \text{ س} + 12 \text{ ع} &= 4 \\ 4 \text{ س} - 4 \text{ ع} &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 4 - \frac{12}{\text{ع}} + \frac{15}{\text{س}} \\ 0 &= \frac{1}{6} - \frac{4}{\text{ع}} - \frac{4}{\text{س}} \end{aligned} \right\} (2)$$

65. حل ، في ح × ح ، الجمل التالية :

$$\left. \begin{aligned} 15 &= \sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}} \\ 7 &= \sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 5 - \frac{1}{1 - \text{ع}} + \frac{4}{2 - \text{س}} \\ 0 &= 2 - \frac{1}{1 - \text{ع}} + \frac{4}{2 - \text{س}} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 5 + \frac{4}{\text{س}} - \frac{1}{1 - \text{ع}} \\ 0 &= 5 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{4}{2 - \text{ع}} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 7 &= |\text{ع}| + |\text{س}| \\ 11 &= |\text{ع}| + |\text{س}|^2 \end{aligned} \right\} (4)$$

66. حل في ح × ح الجمل التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 15 = ع + س \\ 10 = ع + 2س \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = ع - س \\ 7 = ع + 3س \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6}{5} = \frac{س}{ع} \\ 3 = 4س - 3ع \end{array} \right\} (3)$$

67. حل في ح × ح الجمل التالية حيث س و ع هما المجهولين
و ط وسيط حقيقي

$$\left. \begin{array}{l} 1 - س = ع \\ 1 = ع - 2س \end{array} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - ط = ع + س \\ 4 = ع - س \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - ط = ع + س \\ 4 = \frac{س}{ع} \end{array} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = ع + 2س + (1 - ط) \\ 1 = ع + 2س + (1 - ط) \end{array} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = ع + 2س + (1 - ط) \\ 1 = ع + ط + (1 - ط) \end{array} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} 3 &= 2 - ع \quad (ط - 4) س \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 - ط &= ع (3 - ط) - س \\ 1 - ط^3 &= ع (1 - ط^2) + س (1 - ط) \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} 5 &= 3 + ع \quad 2 س \\ 1 - ط^3 &= ع (2 - ط) + س (1 - ط) \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 + ط^5 &= ع (4 - ط^2) + س (1 - ط^2) \\ 0 &= ع + س^2 \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= ع^2 + ط س \\ 0 &= ع (1 - ط^3) + س (1 + ط) \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 5 + ع \quad 2 س \\ 0 &= ع (2 + ط) + س (1 - ط) \end{aligned} \right\} (11)$$

$$0 = ع (6 + ط) + ط س$$

68. حل ، في ح × ح الجملتين

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{ط}{2 - ع} + \frac{1}{1 + س} \\ 5 &= \frac{4}{2 - ع} + \frac{ط}{1 + س} \end{aligned} \right\} (2) \quad \left. \begin{aligned} 1 &= \frac{ط}{ع} + \frac{4}{س} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{ع} + \frac{ط}{س} \end{aligned} \right\} (1)$$

69. حل بياننا المتراجحات التالية :

$$0 > 1 - ع \quad 2 س \quad 0 \leq 1 + ع \quad 5 س$$

$$(3) \quad 3 + ع - س > \frac{1}{3} > \frac{2}{3} - ع \quad \frac{7}{6} + س \quad 2,5 - س$$

70. حل بيانيا جمل المتراجحات التالية :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} 5 - س - 2ع + 3 &\leq 0 \\ 2س + 3ع - 1 &< 0 \end{aligned} \right\} (1) \\
 & \left. \begin{aligned} 5 - س + 6ع + 2 &< 0 \\ -س + ع &< 0 \end{aligned} \right\} (2) \\
 & \left. \begin{aligned} 3س - 4ع + 5 &> 0 \\ 2س + 3ع - 1 &< 0 \end{aligned} \right\} (3) \\
 & \left. \begin{aligned} 3س - 4ع + 5 &> 0 \\ 3,5 &> 1 \end{aligned} \right\} (4) \\
 & \left. \begin{aligned} 0 &\leq 2 - س \\ 0 < 5 + 3ع + س \\ 0 > 1 + 6ع - 4س \end{aligned} \right\} (5) \\
 & \left. \begin{aligned} 0 &> 3 + ع - \\ 0 &\geq 5 - س - ع \\ 0 &< 3 - 4س \end{aligned} \right\} (6) \\
 & \left. \begin{aligned} 5 &\geq 3 - س - ع \\ 12 &\geq 4س + 3ع \end{aligned} \right\} (8) \\
 & \left. \begin{aligned} 0 &\geq 4س + 15ع - 60 \\ 8 &\geq 5س + 2ع \end{aligned} \right\} (7)
 \end{aligned}$$

71. حل بيانيا المتراجحات التالية :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 &< (3 + ع)(2 - س) \\
 (2) \quad 0 &\geq (-3س + ع)(4س + 5 - ع) \\
 (3) \quad 0 &\leq 9ع^2 - 2س \\
 (4) \quad 3 &\geq |س| + |ع|
 \end{aligned}$$

تبايرين متنوعة

72. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$(ط + 3) س^2 + 2(3 ط + 1) س + ط + 3 = 0$$

عَيِّن ط حتى تقبل هذه المعادلة حلاً مضاعفاً .
أحسب هذا الحل المضاعف .

73. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$2 س^2 - (ط + 4) س + ط = 0$$

عَيِّن ط حتى يكون 3 حلاً لهذه المعادلة .
أحسب الحل الآخر .

74. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$ط س^2 - 2(ط - 2) س + ط - 3 = 0 \quad (1)$$

أ) عَيِّن مجموعة قيم ط حتى تقبل المعادلة (1) حلولاً .

ب) عَيِّن ط حتى تقبل المعادلة (1) حلين س' ، س''

بحققان المساواة : $4(س' + س'') = 7 س' س''$.

75. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$ط س^2 + (ط - 4) س + 2 ط = 0$$

عَيِّن ط حتى تقبل هذه المعادلة حلين س' ، س''

بُحِث يكون : $2(س'^2 + س''^2) = 5 س' س''$.

76. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$س^2 - (2 ط + 1) س + \frac{1}{4} + (3 ط - 1)(2 ط - 1) = 0$$

(1) أدرس ، حسب قيم الوسيط ط ، وجود وإشارة الحلين س' ، س'' لهذه المعادلة

(2) أحسب ط و س'' إذا كان $س' = \frac{11}{2}$

$$(3) \text{ عَيِّن ط حتى يكون : } \frac{2'}{3} = \frac{1}{3 - \text{س}'' 2} + \frac{1}{3 - \text{س}' 2}$$

أُحسب ، عندئذ ، س' و س'' .

77. ليكن العدد الحقيقي ط والتطبيق تاو للمجموعة ح في نفسها المعروف كما يلي :

$$\text{تاو (س)} = (2 - \text{ط}) \text{س}^2 + (3 - \text{ط}) \text{س} + 2 - \text{ط} - 5$$

(1) عَيِّن المجموعة مع المعرفة كما يلي :

$$\text{مع} = \{\text{س} \ni \text{ح} : \text{تاو (س)} \leq 0\}$$

(2) عَيِّن ط حتى يكون العدد (1 +) حلا للمعادلة تاو (س) = 0 .

حل ، عندئذ ، هذه المعادلة

(3) بَيِّن أن (1 -) حل للمعادلة تاو (س) = 0 مهما كان العدد الحقيقي ط .

استنتج أنه ، مهما كان العدد الحقيقي ط يختلف عن 2 ، يمكن وضع تاو (س) على شكل جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى .

(4) ناقش ، حسب قيم ط ، عدد حلول المعادلة تاو (س) = 0
أُحسب هذه الحلول بدلالة ط .

(5) هل يمكن تعيين ط حتى تقبل المعادلة تاو (س) = 0

حليْن لها نفس الإشارة ؟

(6) لتكن الدالة هاو للمجموعة ح في نفسها المعرفة كما يلي :

$$\text{هاو (س)} = \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 2}{\text{تاو (س)}}$$

(أ) عَيِّن ، حسب قيم ط ، مجموعة التعريف فط للدالة هاو

(ب) اختزل هاو (س) . ثم حل المعادلة هاو (س) = 1 -

78. ليكن كثير الحدود تاو (س) حيث :

$$\text{تاو (س)} = (3 - \text{ط}) \text{س}^2 + (2 + \text{ط}) \text{س} + 3$$

عَيِّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتى :

(1) تقبل المعادلة تاو (س) = 0 حلاً وحيداً

(2) تقبل المعادلة تاو (س) = 0 حليْن متساويين

- (3) لا تقبل المتراجحة تاو (س) $0 <$ حلا
 (4) يكون العدداً تاو (1) و تاو (2-) موجبين
 (5) يكون 3 حلاً للمعادلة تاو (س) $0 =$
 أحسب ، عندئذ ، الحل الثاني .

79. تاو (س) كثير حدود حيث :

$$\text{تاو (س)} = (1 - \text{ط})\text{س}^2 - (3 + \text{ط})\text{س} + 2(3 - \text{ط})$$

 عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتى يقبل كثير الحدود تاو (س) :
 (1) جذرين جداً وهما يساوي 1
 (2) جذرين متناظرين
 (3) جذرين من إشارتين مختلفتين .
 (4) جذرين موجبين

80. ا، ب عدداً حقيقيان و تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها معرف كما يلي :

$$\text{تا (س)} = \text{ا} + \text{ب س}$$

 (1) عيّن ا، ب بحيث يكون : تا (1) = 5 و تا (3-) = 4
 (2) نفس السؤال من أجل :

$$\bullet \text{ تا (0)} = 1 \text{ و تا } \left(-\frac{2}{3}\right) = 3$$

$$\bullet \text{ تا } \left(\frac{1}{2}\right) = 4 \text{ و تا (1-)} = \frac{3}{4}$$

81. ا، ب ، ح أعداد حقيقية و تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها معرف كما يلي :

$$\text{تا (س)} = \text{ا} + \text{ب س} + \text{ح س}^2$$

 (1) عيّن ا، ب ، ح حتى يكون :
 تا (0) = 3 و تا (1-) = 0 و تا (4) = 1

- (2) نفس السؤال من أجل : تا (1) = 0 و تا (2-) = 0 و تا (3) = $\frac{1}{2}$

82. المستوي منسوب إلى معلم (م، و، ي)

ا، ب، ح ثلاث نقط إحداثياتها (3، 4) ؛ (3، 3) ؛ (1، 2) على الترتيب .

(1) عيّن معادلات ديكارتية للمستقيمت (ا ب) ؛ (ا ح) ؛ (ب ح)
 (2) عيّن جملة متراجحات من الدرجة الأولى للمجهولين س ، ع مجموعة حلولها هي مجموعة الثنائيات (س ، ع) التي تكون من أجلها النقط (س ، ع) داخل المثلث ا ب ح .

83. ط عدد حقيقي ، (Δ ط) و (Δ ط) مستقيمان معادلتهما على الترتيب :

$$(1 - ط) س - ط - ع = 0$$

$$2 ط س + 2 ع + 1 = 0$$

(1) بين أنه من أجل $ط = -\frac{1}{2}$ يكون المستقيمان

(Δ ط) و (Δ ط) متوازيين تماماً

(2) نفرض : $ط \neq -\frac{1}{2}$.

عيّن ، بدلالة ط ، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ ط) و (Δ ط) .

84. المستوي منسوب إلى معلم (م، و، ي)

ط عدد حقيقي و (Δ ط) ، (Δ ط) مستقيمان معادلتهما على الترتيب :

$$2 س - ط - ع + 3 = 0$$

$$ط س - 2 ع + 3 = 0$$

(1) بين أنه من أجل $ط = -2$ يكون المستقيمان

(Δ ط) و (Δ ط) متوازيين تماماً .

(2) بين أنه من أجل $ط = 2$ يكون المستقيمان

(ط ط) و (Δ ط) منطبقين .

(3) نفرض $ط \neq 2$ و $ط \neq -2$

عيّن ، بدلالة ط ، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ ط) و (Δ ط) وبين أن

هذه النقطة تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته : $س + ع = 0$

85. المستوي منسوب إلى معلم (م، و، ي)

(1) حل ، في $ح \times ح$ ، الجملة :

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad (ط - 1) س + 2 ع = ط + 1 \\ (2) \quad ط س + 2 ط ع = ط + 4 \end{aligned} \right\}$$

حيث ط وسيط حقيقي .

(2) عيّن قيم الوسيط ط حتي تكون المعادلتان (1) و (2) معادلتين مستقيمتين

(Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب .

أنشئ المستقيمتين (Δ_1) و (Δ_2)

يبيّن أن جميع المستقيمت (Δ_1) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .

(3) عيّن العدد ط حتي يكون المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متوازيين وأنشئهما .

86. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الحقيقية ح معرفة كما يلي :

$$س \star ع = س ع - 2 (س + ع) + 6$$

(1) أثبت أنه يوجد . في ح ، عنصر جياي للعملية ★

(2) عيّن مجموعة العناصر المتناظرة بالنسبة إلى العملية ★

(3) أثبت أنه يوجد ، في ح ، عنصر ماص للعملية ★

87. نعتبر المعادلة التالية :

$$(1) \quad (ط + 2) س^2 + (ط - 3) س - 5 ط = 0$$

حيث س هو المجهول وط وسيط حقيقي .

(1) عيّن ؛ حسب قيم ط ، عدد حلول هذه المعادلة .

(2) في حالة وجود حلين $س'$ و $س''$ للمعادلة (1) ، نعتبر النقطتين $ه'$ و $ه''$ اللتين

فاصلتاها $س'$ و $س''$ على الترتيب ، في معلم (م، و)

(أ) عيّن ط حتي تكون النقطتان $ه'$ و $ه''$ متناظرتين بالنسبة إلى النقطة أ ذات الفاصلة (3 -) .

حدد ، عندئذ ، النقطتين $ه'$ و $ه''$.

(ب) عيّن ط حتي تكون النقطتان $ه'$ و $ه''$ مترافقتين توافقياً بالنسبة إلى النقطتين أ

و ب اللتين فاصلتاها (3 -) و (1 -) على الترتيب .

ح) يَبَيِّن أنه توجد ، بين حلِّي المعادلة (1) ، علاقة مستقلة عن الوسيط ط .
استعمل هذه العلاقة لإيجاد نقطتين ثابتتين ح ، و يطلب تعيين فاصلتيهما بحيث
يكون (ح ، و ، و ، و) تقسيماً توافقياً .

88. مستطيل محيطه 250 م . إذا أضفنا 20 م إلى طوله و أنقصنا 5 م من عرضه ، لا تتغير مساحته .
عين طول وعرض هذا المستطيل .

89. رتب 42 كتاباً على صف طوله 1,50 م . سمك بعض الكتب 3 سم وسمك البعض الآخر 5 سم .
ما هو عدد كتب كل نوع ؟

90. عَيِّن عددين طبيعيين الفرق بينهما 90 ونسبتها $\frac{23}{5}$

91. عَيِّن عددين حقيقيين غير معدومين مجموع مقلوبيهما $\frac{5}{36}$ والفرق بين مقلوبيهما

$$\frac{1}{36}$$

92. عدد تلاميذ ثانوية مختلطة 1000 .
بعد أن غادر الثانوية 25 تلميذاً و 30 تلميذة ، أصبح عدد البنين ضعف عدد البنات . ما هو عدد البنين وعدد البنات في هذه الثانوية ؟

93. عين عددين طبيعيين الفرق بينهما 6 و الفرق بين مربعيهما 216

94. عين مثلثاً قائماً طول وتره ب و الفرق بين طولي ضلعيه القائمين ط .
نفرض أن ب ثابت . عين قيم ط حتى يكون للمسألة حل .

95. عين ثلاثة أعداد طبيعية فردية متتالية مجموعها 99 .

• نفس السؤال إذا كان المجموع هو 101 .

96. ما هو العدد الطبيعي الذي ينبغي إضافته إلى كل من حدّي كسر للحصول على كسر يساوي ضعف الكسر الأولي .

الباب السابع

حساب المثلثات

24 - الأقواس الموجهة

25 - حساب المثلثات

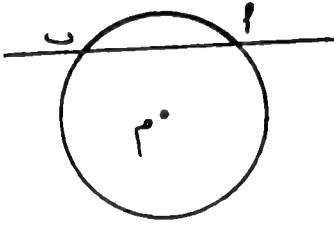
26 - المعادلات المثلثية الأساسية

ان معظم المفاهيم الواردة في هذا الباب (مثل الراديان ، القوس الموجهة ، ...) تعتبر جديدة بالنسبة للتلاميذ وتستحق اهتماما وعناية اكثر لتزويدهم بالعناصر الأساسية في حساب المثلثات .

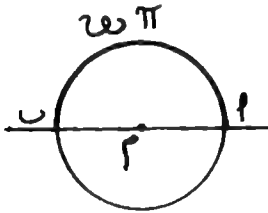
1. الأقواس الهندسية :

1.1 - القوس الهندسية :

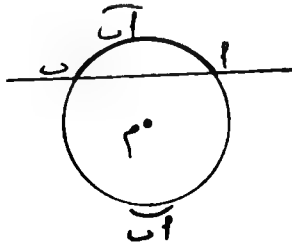
- تُعَيَّن نقطتان f ، b من الدائرة (z) ذات المركز m ونصف القطر r .
قوسين هندسيين وهما تقاطع الدائرة (z) مع نصفي المستويين المغلقين
اللذين حدهما المستقيم ($f b$)



- إذا كانت النقطتان f ، b متناظرتين بالنسبة إلى المركز m يكون لهما
القوسين نفس الطول πr (الشكل)



- إذا كانت النقطتان f ، b غير متناظرتين بالنسبة إلى المركز m تكون
إحدى القوسين ذات طول أصغر من πr ، نرمز إليها بالرمز $\widehat{f b}$
وتكون الأخرى ذات طول أكبر من πr ، نرمز إليها بالرمز $\widehat{b f}$.
مجموع طولي هاتين القوسين يساوي $2 \pi r$ وهو طول الدائرة (z)



2.1 - قياس الأقواس الهندسية :

لقياس قوس دائرة تستخدم الواحدات التالية :

الدرجة ؛ الغراد ؛ الراديان .

• الدرجة :

الدرجة هي قيس قوس دائرة طولها يساوي $\frac{1}{360}$ من طول هذه الدائرة :

ترميز: 1°

• الغراد :

الغراد هو قيس قوس دائرة طولها يساوي $\frac{1}{400}$ من طول هذه الدائرة :

ترميز: 1 غر

• الراديان :

الراديان هو قيس قوس دائرة طولها يساوي نصف قطر هذه الدائرة :

ترميز: 1 ر د

• قيس نصف دائرة حسب الواحدات السابقة هو :

180° ؛ 200 غر ؛ π ر د

• إذا كان قيس قوس حسب الواحدات السابقة هو α درجة ؛ β غراد ؛

γ راديان

يكون :

$$\frac{\gamma}{\pi} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{180}$$

يبيّن الجدول التالي التقابل بين أقياس بعض الأقواس

الدرجة	30	45	60	90
الغراد	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100
الراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

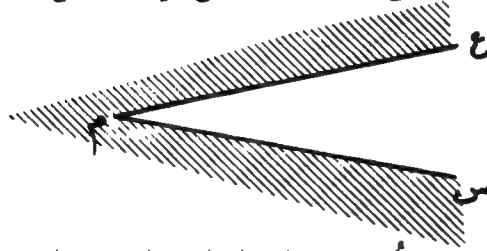
- طول قوس دائرة :
- إذا كان ط طول قوس دائرة نصف قطرها r وكان α قياسها بالراديان
فإن :

$$\text{ط} = \alpha r$$

2. الزوايا الهندسية :

1.2 - الزاوية الهندسية :

- يحدّد نصفًا المستقيمين [م س) و [م ع) قطاعين زاويين :
- القطاع الزاوي الناتيء (الجزء غير المظلل في الشكل)
- والقطاع الزاوي المنعكس (الجزء المظلل في الشكل)

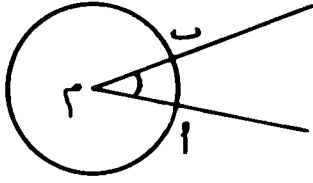


الترميز :

- الرمز [م س ، م ع] يُرمز به إلى القطاع الزاوي الناتيء (أو الزاوية الناتئة) الذي رأسه م و ضلعاها [م س) و [م ع) .
- إذا تطابق نصفًا المستقيمين [م س) و [م ع) فإن الزاوية [م س ، م ع] تسمى الزاوية المعدومة .
- إذا كان نصفًا المستقيمين [م س) و [م ع) متعاكسين فإن الزاوية [م س ، م ع] تسمى الزاوية المستقيمة .

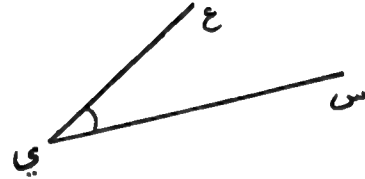
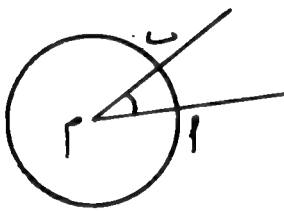
2.2 - الزاوية المركزية :

- (د) دائرة مركزها م .
- أ و ب نقطتان من هذه الدائرة .
- الزاوية [م أ ، م ب] ذات الرأس م والضلعين [م أ) ، [م ب) تسمى زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{أ ب}$.



3.2 - قياس زاوية هندسية :

(د) دائرة ذات المركز م . [ي س ، ي ع] زاوية .
توجد نقطتان ا ، ب من هذه الدائرة بحيث تكون الزاويتان
[ي س ، ي ع] و [م ا ، م ب] متقابستين .



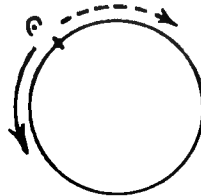
(لهذا فإنه يمكن أخذ [م ا] و [م ب] موازيين ، على الترتيب ، لنصفي
المستقيمين [ي س) و [ي ع) ومن نفس الجهة)
إن قياس الزاوية [ي س ، ي ع] هو قياس القوس الهندسية $\widehat{ا ب}$.
إذا اخترنا وحدة للقياس فإن الرمز $\widehat{س ي ع}$ يرمز به إلى قياس الزاوية
[ي س ، ي ع] .

3. الدائرة الموجهة ، المستوي الموجه :

1.3 - الدائرة الموجهة :

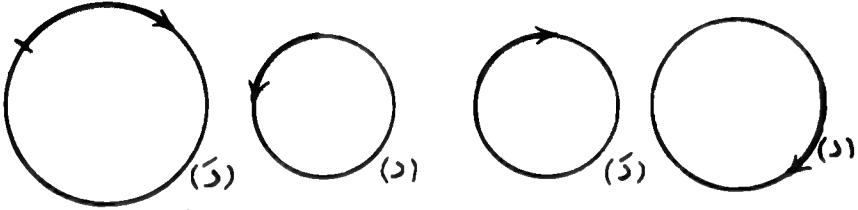
(د) دائرة معطاة .

نقطة متحركة على الدائرة (د) ؛ يمكن لهذه النقطة أن تتحرك في
إتجاهين ممكنين .



إن توجيه الدائرة (د) يعني اختيار اتجاه للحركة من بين الاتجاهين الممكنين .

إذا كانت (د) و (د') دائرتين موجهتين فإنه يمكن معرفة إن كانتا موجهتين في نفس الاتجاه أو في اتجاهين متعاكسين .



(د) و (د') موجهتان في نفس الاتجاه
(د) و (د) موجهتان في اتجاهين متعاكسين

2.3 - المستوي الموجه :

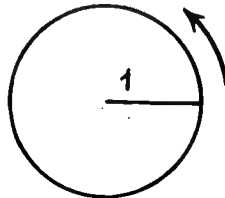
إن توجيه المستوي يعني اختيار اتجاه واحد للحركة على جميع دوائر هذا المستوي .

يسمى هذا الاتجاهُ المباشر أو الموجب
والاتجاه الآخر يسمى الاتجاه غير المباشر أو السالب

إن الاتجاه المباشر الذي نختاره عادة هو الاتجاه المخالف لدوران عقارب الساعة .

3.3 - الدائرة المثلثية :

نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة نصف قطرها يساوي واحدة الأطوال .



4 - الأقواس الموجهة :

1.4 - تعريف :

إذا كانت I و B نقطتين من دائرة موجهة فإن الشائبة (I, B) (B) تعين قوساً موجهة .

نرمز إليها بالرمز \widehat{IB} .

النقطة I تسمى مبدأ القوس \widehat{IB}

والنقطة B تسمى نهاية القوس \widehat{IB}

2.4 - القيس الرئيسي لقوس موجهة :

نسمى قيساً رئيسياً ، مقدراً بالراديات للقيس الموجهة \widehat{IB} العدد الحقيقي θ المعروف كما يلي :

• إذا تطابقت النقطتان I, B تكون القوس \widehat{IB} معدومة و $\theta = 0$

• إذا كانت النقطتان I, B متناظرتين بالنسبة إلى مركز الدائرة يكون

$$\pi = \theta$$

• إذا كانت النقطتان I, B متميزتين وغير متناظرتين بالنسبة إلى مركز

الدائرة فإن :

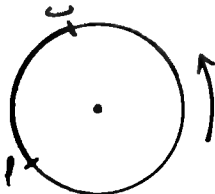
(1) القيمة المطلقة للعدد θ هي قيس القوس الهندسية \widehat{IB} مقدراً بالراديات

(2) للحصول على إشارة θ نتصور نقطة ∞ تتحرك على القوس \widehat{IB} ،

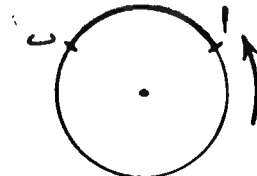
منطلقة من النقطة I ومستقرة عند B .

إذا تحركت هذه النقطة في الاتجاه المباشر يكون العدد θ موجباً

وإذا تحركت ∞ في الاتجاه غير المباشر يكون العدد θ سالباً .



$$\theta > 0$$



$$\theta < 0$$

مثال : القيس الرئيسي لربع دائرة موجهة يساوي :

$$\text{إما } \left(\frac{\pi}{2} + \right) \text{ راديان و إما } \left(\frac{\pi}{2} - \right) \text{ راديان .}$$

ملاحظة :

القيس الرئيسي لقوس موجهة ، مقدراً بالراديانات هو عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[-\pi , \pi]$.

3.4 - أقياس قوس موجهة :

(γ) دائرة في المستوي الموجه و $\overset{\curvearrowright}{\alpha}$ قوس موجهة من هذه الدائرة قيسها الرئيسي θ بالراديان .

لنتصور أن نقطة γ تتحرك على الدائرة (γ) دوماً في الاتجاه نفسه ، منطلقة من α و مستقرة عند β .

يمكن ، بطبيعة الحال ، للنقطة γ أن تمر بالنقطة β عدة مرات . لنميز حالتين : $0 \leq \theta$ و $0 \geq \theta$.

• الحالة الأولى : $0 \leq \theta$

- إذا تحركت γ في الاتجاه الموجب وعملت ك دورة ($\gamma \ni \beta$) ثم استقرت في النقطة β ، نقول إنها قطعت ($\theta + 2\pi$ ك) رادياناً في الاتجاه الموجب ونكتب :

$$\text{قيس } \overset{\curvearrowright}{\alpha} = \theta + 2\pi \text{ ك ، ك } \ni \beta \text{ (1)}$$

- إذا تحركت γ في الاتجاه السالب وعملت ك' دورة ($\gamma' \ni \beta$) ثم استقرت في النقطة β ، نقول إنها قطعت

$$\left(\theta - 2\pi + \right) \text{ ك' رادياناً في الاتجاه السالب ونكتب :}$$

$$\text{قيس } \overset{\curvearrowright}{\alpha} = -(\theta - 2\pi + \text{ك}') =$$

$$= 2\pi - \theta + \text{ك}' =$$

$$= 2\pi - \theta + \text{ك} \text{ ، ك } \ni \beta$$

(بوضع ك = - ك' - 1)

أي قياس $\widehat{AB} = \theta + 2\pi ك$ ، ك $\in \mathbb{Z}$ - (2)

من (1) و (2) نستنتج أن

قياس $\widehat{AB} = \theta + 2\pi ك$ ، ك $\in \mathbb{Z}$)

• الحالة الثانية : $\theta \geq 0$

باتباع الطريقة السابقة نحصل على نفس النتيجة السابقة

قياس $\widehat{AB} = \theta + 2\pi ك$ ، ك $\in \mathbb{Z}$

الخلاصة :

إذا كانت واحدة القياس هي الراديان وكان θ القياس الرئيسي للقوس

الموجهة \widehat{AB} وكان θ' قياساً آخر للقوس \widehat{AB}

فإن :

$$\theta' = \theta + 2\pi ك \quad (ك \in \mathbb{Z})$$

4.4 - خواص أقياس أقواس موجهة :

انطلاقاً من النتائج السابقة يمكن التأكد من الخواص التالية

الخاصة 1 :

لكل قوس موجهة \widehat{AB} ما لا نهاية من الأقياس .

ليكن θ_1 قياساً للقوس \widehat{AB} .

يكون θ_2 قياساً للقوس \widehat{AB} إذا وفقط إذا كان

$$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi ك \quad (ك \in \mathbb{Z})$$

مثلا :

$$(1) \frac{\pi 3}{2} \text{ و } \left(\frac{\pi 13}{2} - \right) \text{ قياسان لنفس القوس الموجهة لأن :}$$

$$\pi 8 = \left(\frac{\pi 13}{2} - \right) - \frac{\pi 3}{2}$$

و $\pi 8$ من الشكل $\pi 2$ ك (ك \Rightarrow صـ)

(2) π و $\pi 4$ قياسان لقوسين مختلفتين لأن :

$$\pi 3 = \pi - \pi 4$$

و $\pi 3$ ليس من الشكل $\pi 2$ ك (ك \Rightarrow صـ)

الخاصة 2 (علاقة شال)

إذا كانت α ، β ، γ ثلاث نقط من دائرة موجهة (س)

فإن :

$$\text{قياس } \widehat{\alpha\beta} + \text{قياس } \widehat{\beta\gamma} = \text{قياس } \widehat{\alpha\gamma} + \pi 2 \text{ ك (ك } \Rightarrow \text{ صـ)}$$

من هذه الخاصة نستنتج أن :

$$\text{قياس } \widehat{\alpha\beta} - \text{قياس } \widehat{\beta\gamma} = \text{قياس } \widehat{\alpha\gamma} + \pi 2 \text{ ك (ك } \Rightarrow \text{ صـ)}$$

مثال : إذا كان $\frac{\pi}{3}$ قياسا للقوس $\widehat{\alpha\beta}$ يكون $\left(\frac{\pi}{3} - \right)$ قياسا

للقوس $\widehat{\beta\gamma}$

$\left(\frac{\pi}{3} - \right)$ ليس القياس الوحيد للقوس $\widehat{\alpha\gamma}$.

$$\pi 2 = \left(\frac{\pi}{3} - \right) - \frac{\pi 5}{3} \text{ مثلاً } \frac{\pi 5}{3} \text{ قياس آخر للقوس } \widehat{\alpha\gamma} \text{ لأن}$$

الخاصة 3

مهما كان العدد الحقيقي α ، ومهما كانت النقطة A من الدائرة الموجهة (S) فإنه توجد نقطة وحيدة B بحيث يكون α قياساً ، بالراديات للقوس الموجهة \widehat{AB}

تمرين محلول :

A نقطة من دائرة موجهة (S) .
أوجد القيس الرئيسي لكل قوس من الأقواس التالية :
 \widehat{AB} ، $\widehat{AB'}$ ، $\widehat{AB''}$ علماً أن :
قيس $\widehat{AB} = \pi 75 -$ ؛ قيس $\widehat{AB'} = \frac{\pi 123}{4}$ ؛
قيس $\widehat{AB''} = \frac{\pi 65}{3}$
ثم ارسم النقط B ؛ B' ؛ B'' على هذه الدائرة

الحل :

لدينا : (1) $\pi 75 - = 2 + \pi (\pi 38 -)$

القيس الرئيسي للقوس \widehat{AB} هو π

(2) القسمة الإقليدية للعدد 123 على 4 تعطي :

$$3 + 30 \times 4 = 123$$

$$\frac{\pi (3 + 30 \times 4)}{4} = \frac{\pi 123}{4} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{\pi 3}{4} + \pi 30 = \frac{\pi 123}{4} \quad \text{أي :}$$

$$\pi (15) 2 + \frac{\pi 3}{4} =$$

القيس الرئيسي للقوس $\widehat{AB'}$ هو $\frac{\pi 3}{4}$

3) القسمة الإقليدية للعدد 65 على 3 تعطي

$$2 + 21 \times 3 = 65$$

$$\frac{\pi(2 + 21 \times 3)}{3} = \frac{\pi 65}{3} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{\pi 2}{3} + \pi 21 = \frac{\pi 65}{3} \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{\pi 2}{3} + \pi 21 \right) \text{ ليس من الشكل } \theta + 2\pi \text{ كـ } \pi \text{ حيث}$$

$$\theta \in [\pi - , \pi +] \text{ و كـ } \theta \in \pi$$

لنكتبه على هذا الشكل :

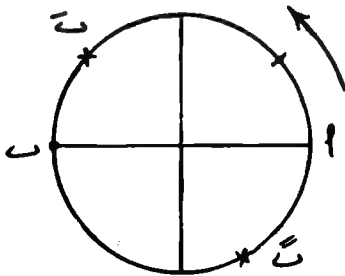
$$\frac{\pi 2}{3} + \pi - \pi 22 = \frac{\pi 2}{3} + \pi 21$$

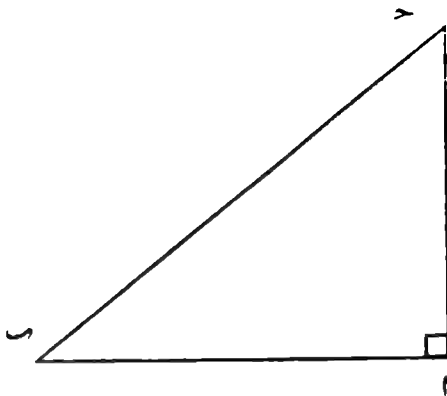
$$\frac{\pi}{3} - \pi 22 =$$

$$\pi (11) 2 + \frac{\pi}{3} - =$$

القياس الرئيسي للقوس "أ" هو $\left(\frac{\pi}{3} - \right)$

الأقياس الرئيسية السابقة تسمح لنا برسم النقط
ب، ب'، ب" (الشكل)





1. التذكير بالمفاهيم المدروسة
في حساب المثلثات

1.1. النسب المثلثية لزاوية حادة
في مثلث قائم
أب ج مثلث قائم في ج
لدينا التعاريف التالية

$$\frac{\text{بج}}{\text{أب}} = \widehat{\text{ب}} = \text{ج ب}$$

$$\frac{\text{أج}}{\text{أب}} = \widehat{\text{أ}} = \text{ن ج ب}$$

$$\frac{\text{أج}}{\text{بج}} = \widehat{\text{ب}} = \text{ن ظ ل}$$

$$\frac{\text{أب}}{\text{بج}} = \widehat{\text{ب}} = \text{ظ ل}$$

هذه التعاريف تسمح لنا بحساب :
• طول ضلع بمعرفة طول ضلع آخر وقيس زاوية حادة
• قيس زاوية بمعرفة طولي ضلعين
مثلا لدينا :

$$\widehat{\text{ب}} = \text{ج ب} = \frac{\text{بج}}{\text{أب}}$$

$$\widehat{\text{أ}} = \text{ن ج ب} = \frac{\text{أج}}{\text{أب}}$$

$$\widehat{\text{ب}} = \text{ن ظ ل} = \frac{\text{أج}}{\text{بج}}$$

ملاحظة :

$$\text{من المساويات نجيب } \widehat{ج} = \frac{\widehat{أ}}{\widehat{ب}} = \widehat{ب} \quad \text{و} \quad \widehat{أ} = \widehat{ب} + \widehat{ج} = 90^\circ$$

$$\text{نستنتج } \widehat{ج} = (90^\circ - \widehat{أ})$$

اذن : في مثل قائم جيب زاوية حادة يساوي تمام الزاوية المتمة لها

2.1. النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

يبين الجدول التالي قيم النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

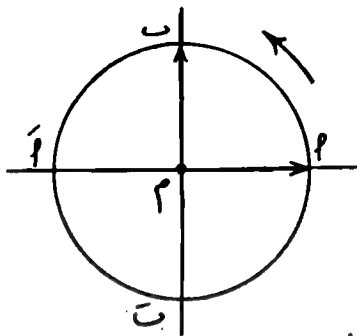
القيس بالدرجة	القيس بالراديان	الجيب	جيب تمام	الظل	ظل تمام
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. جيب تمام وجيب عدد حقيقي

2.1. الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم

المستوى الموجه منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م، و، ن)

الدائرة الموجهة (د) التي مركزها م ونصف قطرها 1 ، تسمى الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم (م، و، ن)



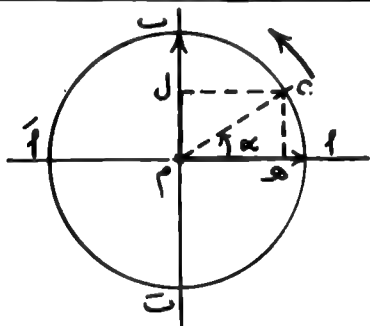
نسمي فيما يلي $1, 1', 0, 0'$ ،
النقط من الدائرة (s) المعرفة كما
يلي :

$$1(0, 1) ; 1'(0, 1 -) ; 0(1, 0) ; 0'(1 - , 0)$$

2.2 - جيب تمام وجيب عدد حقيقي :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ρ تنتمي إلى الدائرة المثلثية
(s) بحيث يكون α قياساً ، بالراديان ، للقرس $\widehat{A\rho}$

نسمي جيب تمام العدد الحقيقي α فاصلة النقطة ρ ونرمز إليه بالرمز
تجب α



نسمي جيب العدد الحقيقي α
ترتيب النقطة ρ ونرمز إليه بالرمز
جب α

إذن :

إذا كان $ه$ المسقط العمودي للنقطة ρ على ($م$)

وكان $ل$ المسقط العمودي للنقطة ρ على ($م$)

فإن :

$$\overline{م ه} = \alpha \text{ جب} ; \overline{م ل} = \alpha \text{ تجب}$$

• يسمى محور الفواصل محور جيوب التمام ويسمى محور الترتيب محور
الجيوب .

- نلاحظ أنه عندما تنتمي النقطة ρ إلى الدائرة المثلثية (s) فإن النقطتين $هـ$ و $ل$ تنتميان ، على الترتيب ، إلى القطعتين [$أ' ب'$] و [$ب' ص$] .
ومنه :

$$1 - \cos \alpha \geq 1 - \cos \alpha \text{ و } 1 - \cos \alpha \geq 1 - \cos \alpha$$

- نعلم أنه إذا كان α قياساً للقرص ρ فإن كل عدد من الشكل $2\pi + \alpha$ ($ك \in \mathbb{Z}$) هو قياس للقرص ρ .
وبالتالي :

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha \text{ و } \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

- من المساواة $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

3 - ظل وظل تمام عدد حقيقي :

1.3 - ظل عدد حقيقي :

تعريف :

α عدد حقيقي بحيث $\cos \alpha \neq 0$.
نسمي ظل العدد α النسبة $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ونرمز إليه بالرمز ظل α

- التفسير الهندسي

نعلم أنه :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ρ من الدائرة المثلثية (s) بحيث يكون α قياساً للقرص ρ .

من توازي المستقيمين (أط) و (هـ) وبتطبيق نظرية طاليس يكون

كذلك من توازي المستقيمين (م) و (ك) وتطبيقاً لنظرية طاليس يكون لدينا :

من (1) و (2) نستنتج : $\frac{\overline{ط}}{\overline{ك}} = \frac{\overline{م}}{\overline{ه}}$

$$\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha} = \overline{\text{أي : ط}}$$

117

$$\boxed{\alpha \text{ ظل} = \overline{\alpha \text{ ظل}}} \quad \text{إذن :}$$

يسمى المحور $(\Delta, \overleftarrow{\gamma})$ محور الظلال

• خاصة :

$$1 = \alpha^2 \text{ جب} + \alpha^2 \text{ تجب}$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \text{ تجب}} = \frac{\alpha^2 \text{ جب} + \alpha^2 \text{ تجب}}{\alpha^2 \text{ تجب}} \quad \text{نستنتج :}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha^2 \text{ تجب}} = \alpha^2 \text{ ظل} + 1} \quad \text{أي :}$$

2.3 - ظل تمام عدد حقيقي :

$$\alpha \text{ عدد حقيقي بحيث } \alpha \neq 0$$

$$\text{نسمي ظل تمام العدد } \alpha \text{ النسبة } \frac{\alpha \text{ تجب}}{\alpha \text{ جب}} \text{ ونرمز إليه بالرمز تظل } \alpha$$

نلاحظ أنه إذا كان $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq 0$ فإن :

$$\frac{1}{\alpha \text{ ظل}} = \alpha \text{ تظل}$$

3.3 - قيم تجب ، جب ، ظل ، تظل بعض الأعداد :

يبين الجدول التالي قيم جيب تمام ، جيب ، ظل ، وتظل الأعداد التالية

$$0 \text{ ؛ } \frac{\pi}{6} \text{ ؛ } \frac{\pi}{4} \text{ ؛ } \frac{\pi}{3} \text{ ؛ } \frac{\pi}{2}$$

العدد	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
جـب x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
تـجـب x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ظل α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف
تظل α	غير معرف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

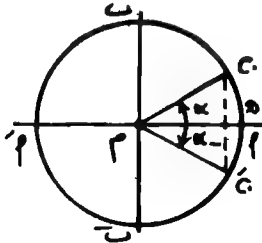
4 - العلاقات بين جيب . جيب تمام وظلال عددين x و \bar{x} مجموعها

أو فرقها : 0 أو π أو $\frac{\pi}{2}$

$$0 = \bar{x} - x = 1.4$$

لدينا $\bar{x} = x$

لتكن α و α' النقطتين من الدائرة المثلثة (س) بحيث يكون α قياساً للقوس α ويكون α' قياساً للقوس α' تسمى القوسان α و α' قوسين متعاكسين.



بما أن النقطتين α و α' متناظرتان بالنسبة إلى (11) فلها نفس الفاصلة وترتيباها متعاكسان .

ومنه :

$$\begin{aligned} \text{تجب } \alpha &= (\alpha -) \\ \text{جب } \alpha &= (\alpha -) \\ \text{ظل } \alpha &= (\alpha -) \end{aligned}$$

$$2.4 - \boxed{\pi = \alpha + \alpha'} :$$

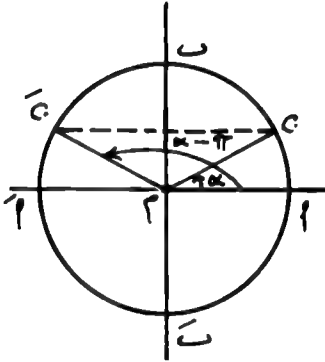
لدينا : $\alpha - \pi = \alpha'$

لتكن α و α' النقطتين من الدائرة المثلثية (α) بحيث يكون α قياسا للقوس α و α' ويكون $(\alpha - \pi)$ قياسا للقوس α' .
تسمى القوسان α و α' قوسين متكاملتين .

النقطتان α و α' متناظرتان بالنسبة إلى (π) .

فلهما فاصلتان متعاكستان ولهما نفس الترتيب .

ومنه :



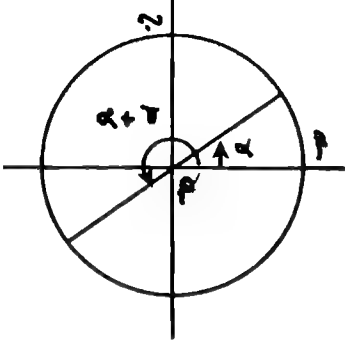
$$\begin{aligned} \text{تجب } \alpha &= (\alpha - \pi) \\ \text{جب } \alpha &= (\alpha - \pi) \\ \text{ظل } \alpha &= (\alpha - \pi) \end{aligned}$$

$$3.4 - \boxed{\pi = \alpha - \alpha'} :$$

لدينا : $\pi + \alpha = \alpha'$

لتكن α و α' النقطتين من الدائرة المثلثية (α) بحيث يكون α قياسا للقوس α و α' ويكون $(\pi + \alpha)$ قياسا للقوس α' .
النقطتان α و α' متناظرتان بالنسبة إلى المركز م .

فلها فاصلتان متعاكستان وترتيبان متعاكسان
ومنه



$$\begin{aligned} \text{جب } - &= (\pi + \alpha) \\ \text{تجب } - &= (\pi + \alpha) \\ \text{ظل } &= (\pi + \alpha) \end{aligned}$$

4.4 -

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \alpha$$

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{لدينا}$$

لتكن α و α' النقطتين من الدائرة المثلثية (3)

بحيث يكون α قياساً للقرص α' و $\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ قياساً للقرص α'

تسمى القوسان α' و α' قوسين متتامين

لقد رأينا انه إذا كانت لدينا زاويتان متتامتان في مثلث قائم فإن جيب قياس احدهما يساوي جيب تمام قياس الآخر ويمكن تعميم هذه النتيجة على قوسين متتامين

$$\alpha \text{ تجب } = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \text{ جب}$$

$$\alpha \text{ جب } = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \text{ تجب}$$

$$\alpha \text{ ظل } = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \text{ ظل}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \alpha' - \alpha} \quad - 5.4$$

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = \alpha' \quad \text{لدينا}$$

بتطبيق النتائج السابقة يمكن ان نكتب

$$\left((\alpha -) - \frac{\pi}{2} \right) \text{تجب} = \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{تجب} \bullet$$

$$\alpha \text{ جب} - = (\alpha -) \text{ جب} =$$

$$\left((\alpha -) - \frac{\pi}{2} \right) \text{جب} = \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{جب} \bullet$$

$$\alpha \text{ تجب} = (\alpha -) \text{تجب} =$$

$$\left((\alpha -) - \frac{\pi}{2} \right) \text{ظل} = \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{ظل} \bullet$$

$$\alpha \text{ تظل} - = (\alpha -) \text{تظل} =$$

$$\begin{aligned} \alpha \text{ جب} - &= \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{تجب} \\ \alpha \text{ تجب} &= \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{جب} \\ \alpha \text{ تظل} - &= \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{ظل} \end{aligned}$$

المعادلات المثلثية الأساسية

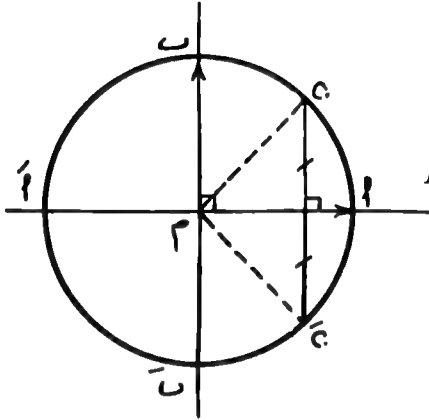
26

1 - المعادلات من الشكل $\text{تجيب س} = \alpha$

1.1 - الأعداد التي لها نفس جيب تمام :

• α و β عددان حقيقيان و α, β نقطتان من الدائرة المثلثية (س) بحيث

يكون α قياسا للقوس \widehat{AO} و β قياسا للقوس $\widehat{AO'}$



يكون للعدد α و β نفس جيب تمام إذا وفقط إذا كانت للنقطتين A و A'

و α نفس الفاصلة وهذا يعني أن

النقطتين A و A' متطابقتان أو

متناظرتان بالنسبة إلى (م)

ومنه النتيجة :

$$\left(\begin{array}{c} \alpha = \beta + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \alpha = -\beta + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{تجيب س} = \alpha = \beta$$

2.1 - حل المعادلة $\text{تجيب س} = \alpha$:

نعتبر المعادلة $\text{تجيب س} = \alpha$ حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد

حقيقي معطى :

النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة :

$\text{تجيب س} = \alpha$

$$\left(\begin{array}{c} \text{س} = \alpha + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \text{س} = -\alpha + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{تجيب س} = \alpha$$

أمثلة :

(1) حلول المعادلة $\sin s = \frac{\pi}{3}$ هي الأعداد الحقيقية s

$$\left[\begin{array}{l} \text{حيث : } \sin s = \frac{\pi}{3} \text{ . } s = \frac{\pi}{3} \text{ أو } s = \frac{2\pi}{3} \\ \text{أو} \\ \sin s = \frac{\pi}{3} \text{ . } s = \frac{2\pi}{3} \text{ أو } s = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right]$$

(2) لتعتبر المعادلة ذات المجهول s :

$$(م) \quad \sin \left(\frac{\pi}{4} + s \right) = \frac{1}{2}$$

لدينا :

$$\left[\begin{array}{l} \sin \left(\frac{\pi}{4} + s \right) = \frac{1}{2} \text{ . } s = \frac{\pi}{4} \text{ أو } s = \frac{3\pi}{4} \\ \text{أو} \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} + s \right) = \frac{1}{2} \text{ . } s = \frac{5\pi}{4} \text{ أو } s = \frac{7\pi}{4} \end{array} \right] \Leftrightarrow (م)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin s = \frac{1}{2} \text{ . } s = \frac{\pi}{6} \text{ أو } s = \frac{5\pi}{6}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin s = \frac{1}{2} \text{ . } s = \frac{\pi}{6} \text{ أو } s = \frac{5\pi}{6}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin s = \frac{1}{2} \text{ . } s = \frac{\pi}{6} \text{ أو } s = \frac{5\pi}{6}$$

حلول المعادلة (م) هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = 2 + \frac{\pi}{4} \text{ ك.ك.} \vee \text{س} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2 + \frac{\pi}{12} \text{ ك.ك.} \vee \text{س} \end{array} \right]$$

(3) لنعتبر المعادلة ذات المجهول س :

$$\text{تجب} \left(\frac{\pi}{3} - \text{س} \right) = \text{تجب} \left(\frac{\pi}{6} + \text{س} \right) \quad (م')$$

لدينا :

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{3} - \text{س} + 2 + \frac{\pi}{6} \text{ ك.ك.} \vee \text{س} \quad (3) \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \text{س} \right) + 2 \text{ ك.ك.} \vee \text{س} \quad (4) \end{array} \right] \Leftrightarrow (م')$$

المعادلة (3) ليس لها حلّ

$$(4) \Leftrightarrow 2\text{س} = 2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \text{ ك.ك.} \vee \text{س}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{12} + \pi \text{ ك.ك.} \vee \text{س}$$

إذن حلول المعادلة (م') هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\text{س} = \frac{\pi}{12} + \pi \text{ ك.ك.} \vee \text{س}$$

3.1 - حل المعادلة $\sin s = \tau$:

τ عدد حقيقي و (s) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم $(\overleftarrow{m} \cdot \overleftarrow{a} \cdot \overleftarrow{m} \cdot \overleftarrow{m})$
الأعداد الحقيقية s التي تحقق $\sin s = \tau$ هي أقياس الأقواس \widehat{a}
بحيث تكون فاصلة τ هي τ

- إذا كان $\tau \notin [-1, 1]$ لا يوجد حل للمعادلة $\sin s = \tau$
- إذا كان $\tau \in [-1, 1]$ توجد على الأقل نقطة τ من الدائرة (s) فاصلتها τ

إذا كان α قياساً للقوس \widehat{a} فإن حل المعادلة $\sin s = \tau$ يؤول إلى
حل المعادلة $\sin s = \tau$

أمثلة :

$$(1) \text{ نعتبر المعادلة } \sin s = \frac{1}{2}$$

$$\text{نعلم أن } \sin s = \frac{1}{2}$$

حلول المعادلة $\sin s = \frac{1}{2}$ هي حلول المعادلة

$\sin s = \frac{\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية s حيث

$$\left(s = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right)$$

أو

$$\left(s = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right)$$

(2) نعتبر المعادلة $2 + 1 \text{ تجب } س = 0$

لدينا $2 + 1 \text{ تجب } س = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{تجب } س$

نعلم أن $\text{تجب } \frac{1}{2} = \frac{\pi 2}{3}$ الآن :

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ تجب } = \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) \text{ تجب}$$

حلول المعادلة $2 + 1 \text{ تجب } س = 0$ هي حلول المعادلة

$\text{تجب } س = \frac{\pi 2}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية $س$ حيث :

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi 2}{3} + \pi ك . ك \ni \text{صه} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi 2}{3} - \pi ك . ك \ni \text{صه} \end{array} \right]$$

(3) نعتبر المعادلة $\text{تجب } س = 1$

نعلم أن $\text{تجب } 0 = 1$

$\text{تجب } س = 1 \Rightarrow \text{تجب } س = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = 0 + \pi ك . ك \ni \text{صه} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 0 - \pi ك . ك \ni \text{صه} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{س} = \pi ك . ك \ni \text{صه} \\ \text{س} = -\pi ك . ك \ni \text{صه} \end{array}$$

حلول المعادلة $\text{تجب } س = 1$ هي الأعداد الحقيقية $س$ حيث

$$\text{س} = \pi ك . ك \ni \text{صه}$$

(4) نعتبر المعادلة نجب س = 1 -

نعلم أن نجب $\pi = 1 -$

$$\text{نجب س} = 1 - \Leftrightarrow \text{نجب س} = \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} = \pi + 2\pi ك . ك \ni \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = -\pi + 2\pi ك . ك \ni \text{ص} \\ \text{س} = \pi (1 + 2 ك) . ك \ni \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \pi (1 - 2 ك) . ك \ni \text{ص} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

العددان الصحيحان $(1 - 2 ك)$ و $(1 + 2 ك)$ فريديان وكيفيان

يمكن كتابتهما على شكل موحد $(1 + 2 ك')$. $ك' \ni \text{ص}$

إذن :

حلول المعادلة نجب س = 1 - هي الأعداد الحقيقية

س حيث س = $\pi (1 + 2 ك')$. $ك' \ni \text{ص}$

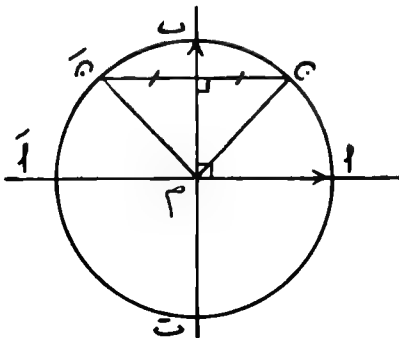
2 - المعادلات من الشكل جب س = جب α :

1.2 - الأعداد التي لها نفس الجيب :

α و β عددان حقيقيان ، و ω و ω' نقطتان من الدائرة المثلثية (س) المرفقة

بالمعلم (م ، م ، م ، م ، م ، م)

بحيث يكون α قياسا للقوس $\omega \omega'$ و β قياسا للقوس $\omega \omega'$



يكون للعددين α و β نفس الجيب

إذا وفقط إذا كان للنقطتين ω و ω'

نفس الترتيب وهذا يعني أن

النقطتين ω و ω' متطابقتان أو

متناظرتان بالنسبة إلى (م ، م) .

ومنه النتيجة :

$$\left(\begin{array}{l} \text{جب } \alpha = \text{جب } \beta \\ \text{أو} \\ \text{جب } \alpha = \text{جب } \beta - \pi \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 2\pi + \beta = \alpha \text{ . ك } \exists \text{ ص} \\ \text{أو} \\ 2\pi + \beta - \pi = \alpha \text{ . ك } \exists \text{ ص} \end{array} \right)$$

2.2 - حل المعادلة جب س = جب α :

نعتبر المعادلة جب س = جب α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى. النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة جب س = جب α

$\left[\begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \alpha \text{ . ك } \exists \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \alpha - \pi \text{ . ك } \exists \text{ ص} \end{array} \right]$	$\Leftrightarrow \text{جب س} = \text{جب } \alpha$
---	---

أمثلة :

(1) حلول المعادلة جب س = جب $\frac{\pi}{6}$ هي الأعداد الحقيقية س

حيث :

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ . ك } \exists \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} - \pi \text{ . ك } \exists \text{ ص} \end{array} \right] \text{ أي } \left[\begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ . ك } \exists \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} - \pi \text{ . ك } \exists \text{ ص} \end{array} \right]$$

(2) نعتبر المعادلة جب 2 س = جب $\left(-\frac{\pi}{4} \text{ س} \right)$ (م)
لدينا :

$$\left[\begin{array}{l} 2 \text{ س} - \frac{\pi}{4} = 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ 2 \text{ س} - \frac{\pi}{4} = 2\pi \text{ ك} + \pi , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow (م)$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 \text{ س} + \frac{\pi}{4} = 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ 3 \text{ س} + \frac{\pi}{4} = 2\pi \text{ ك} + \pi , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 \text{ س} + \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi \text{ ك}}{3} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ 3 \text{ س} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi \text{ ك}}{3} + \pi , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

إذن حلول المعادلة جب 2 س = جب $\left(-\frac{\pi}{4} \text{ س} \right)$ هي
الأعداد الحقيقية س حيث

$$\left[\begin{array}{l} 3 \text{ س} + \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi \text{ ك}}{3} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ 3 \text{ س} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi \text{ ك}}{3} + \pi , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

(3) نعتبر المعادلة 2 جب 2 س $- 7$ جب $3 + 0 = 3$ (1)

نضع جب س = ع ونحل الجملة

$$\left. \begin{array}{l} \text{ع} = \text{جب س} \\ \text{و} \\ 2 \text{ ع} - 7 = 3 + 0 \end{array} \right\} (2)$$

للمعادلة (2) حلان 3 و $\frac{1}{2}$

من أجل $\text{ع} = 3$ نحصل على المعادلة جب س $= 3$ التي ليس لها حل ومن

أجل $\text{ع} = \frac{1}{2}$ نحصل على المعادلة جب س $= \frac{1}{2}$ والتي حلولها هي الأعداد

الحقيقية س حيث

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = 2\pi \text{ ك} + \frac{\pi}{6} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi \text{ ك} + \frac{5\pi}{6} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

إذن حلول المعادلة (1) هي الأعداد الحقيقية س حيث:

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = 2\pi \text{ ك} + \frac{\pi}{6} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi \text{ ك} + \frac{5\pi}{6} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

3.2 - حل المعادلة جب س = ط :

ط عدد حقيقي و (س) الدائرة المثلثية

الأعداد الحقيقية س التي تحقق جب س = ط هي أقياس الأقواس $\widehat{س}$ بحيث يكون ترتيب $\widehat{س}$ هو ط

• إذا كان ط $\notin [1, -1]$ لا يوجد حل للمعادلة جب س = ط

• إذا كان ط $\in [1, -1]$ توجد على الأقل نقطة $\widehat{س}$ من الدائرة (س)

ترتيبها ط

إذا كان α قياساً للقوس $\widehat{س}$ فإن حل المعادلة جب س = ط يؤول إلى حل المعادلة جب س = جب α

أمثلة :

$$(1) \text{ نعتبر المعادلة جب س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{نعلم أن جب} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{حلول المعادلة جب س} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ هي حلول المعادلة}$$

$$\text{جب س} = \text{جب} \frac{\pi}{3} \text{ وهي الأعداد الحقيقية س حيث}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\pi ك . ك \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\pi ك - \pi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi ك . ك \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

أي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{3} , \text{ك} \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{3} , \text{ك} \text{ ص} \end{array} \right\}$$

(2) نعتبر المعادلة $2 + 1 \text{ جب س} = 0$

$$\text{لدينا } 2 + 1 \text{ جب س} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{جب س}$$

$$\text{نعلم أن جب } \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

حلول المعادلة $2 + 1 \text{ جب س} = 0$ هي حلول المعادلة

$$\text{جب س} = \text{جب } \left(\frac{\pi}{6} \right) \text{ وهي الأعداد الحقيقية س حيث}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} , \text{ك} \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \left(\frac{\pi}{6} \right) - \pi , \text{ك} \text{ ص} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} , \text{ك} \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \left(\frac{\pi}{6} \right) - \pi , \text{ك} \text{ ص} \end{array} \right\}$$

أي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} , \text{ك} \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} , \text{ك} \text{ ص} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} , \text{ك} \text{ ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = 2\pi + \frac{\pi}{6} , \text{ك} \text{ ص} \end{array} \right\}$$

(3) نعتبر المعادلة جب س = 1

$$1 = \frac{\pi}{2} \text{ جب } \text{نعلم أن}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ جب س} = 1 \Leftrightarrow \text{جب س} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ ك} - \pi , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z}$$

حلول المعادلة جب س = 1 هي الأعداد الحقيقية

$$\text{س حيث س} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ ك} , \text{ ك} \in \mathbb{Z}$$

(4) نعتبر المعادلة جب س = 1 - (1)

$$1 - = \left(\frac{\pi}{2} - \right) \text{ جب } \text{نعلم أن}$$

$$(1) \Leftrightarrow \text{جب س} = \text{جب} \left(\frac{\pi}{2} - \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{2} + \pi 2 \text{ ك ، ك } \ni \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \left(\frac{\pi}{2} - \right) + \pi 2 \text{ ك ، ك } \ni \text{ص} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{2} + \pi 2 \text{ ك (ك } \ni \text{ص)} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi}{2} + \pi 2 (1 + \text{ك}) \text{ (ك } \ni \text{ص)} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{س} = \frac{\pi}{2} + \pi 2 \text{ ك (ك } \ni \text{ص)} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{\pi}{2} + \pi 2 \text{ ك' (ك' } \ni \text{ص)} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\text{يضع ك + 1 = ك'}$$

إذن :

حلول المعادلة جب س = -1 هي الأعداد الحقيقية س حيث :

$$س = \frac{\pi}{2} + 2\pi ك \quad (ك \in \mathbb{Z})$$

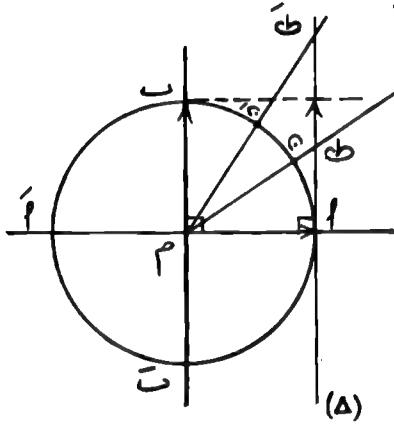
$$\sqrt{2} = \text{جب س} \quad (5)$$

$$\text{لدينا } \sqrt{2} < 1$$

إذن ليس للمعادلة جب س = $\sqrt{2}$ حل

3 - المعادلات من الشكل ظل س = ظل α

1.3 - الأعداد التي لها نفس الظل :



α و β عددان حقيقيان ، δ و ϵ

النقطتان من الدائرة المثلثية (س)

بحيث يكون α قياسا للقوس \widehat{AP} و β

قيسا للقوس \widehat{BP}

نسمي ط نقطة تقاطع المستقيمين

(م) و (د) ، و ط ' نقطة

تقاطع المستقيمين (د) و (م) ' (د)

يكون للعدد α و β نفس الظل إذا وفقط إذا كانت النقطتان ط و ط '

متطابقتين وهذا يعني أن النقطتين د و د ' متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى

النقطة م

فعندما تكون د و د ' متطابقتين

$$\text{يكون } \alpha = \beta + 2\pi ك \quad (1) \quad ك \in \mathbb{Z}$$

وعندما تكون د و د ' متناظرتين بالنسبة إلى م

$$\text{يكون } \alpha = \beta + \pi + 2\pi ك \quad ك \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \alpha = \beta + \pi (1 + 2ك) \quad ك \in \mathbb{Z}$$

يمكن كتابة (1) و (2) على الشكل الموحد

$$\alpha = \beta + \pi ك' , ك' \in \mathbb{R}$$

لأن :

من أجل قيم $ك'$ الزوجية نحصل على (1) ومن أجل قيم $ك'$ الفردية نحصل على (2)

ومنه النتيجة :

$$\text{ظل } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + \pi ك' , ك' \in \mathbb{R}$$

2.3 - حل المعادلة ظل س = ظل α

نعتبر المعادلة ظل س = ظل α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى :

النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة ظل س = ظل α

$$\boxed{\text{ظل س} = \text{ظل } \alpha \Leftrightarrow \alpha = س + \pi ك' , ك' \in \mathbb{R}}$$

أمثلة :

(1) حلول المعادلة ظل س = ظل $\frac{\pi}{4}$ هي الأعداد الحقيقية س .

$$\text{حيث س} = \frac{\pi}{4} + \pi ك' , ك' \in \mathbb{R}$$

(2) نعتبر المعادلة ظل 3 س = ظل $\left(2 - \frac{\pi}{3}\right)$ (م)

لدينا :

$$(م) \Leftrightarrow 3 س = 2 - \frac{\pi}{3} + \pi ك' , ك' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 5 س = \frac{\pi}{3} + \pi ك' , ك' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi ك'}{5} , ك' \in \mathbb{R}$$

إذن حلول المعادلة ظل 3 س = ظل $\left(2 - \frac{\pi}{3}\right)$ س

هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$س = \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5} ك . ك \in \mathbb{R}$$

3.3 - حل المعادلة ظل س = ط

مهما يكن العدد الحقيقي ط يوجد ، على الأقل ، عدد حقيقي x بحيث يكون ظل x = ط

وحل المعادلة ظل س = ط يؤول إلى حل المعادلة ظل س = ظل x
أمثلة :

(1) نعتبر المعادلة ظل س = 1

$$نعلم أن ظل \frac{\pi}{4} = 1$$

حلول المعادلة ظل س = 1 هي حلول المعادلة

ظل س = ظل $\frac{\pi}{4}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

$$س = \frac{\pi}{4} + \pi ك . ك \in \mathbb{R}$$

٢

(2) نعتبر المعادلة ظل $\frac{س}{2} = \sqrt{3}$

$$نعلم أن ظل \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ ظل} = \frac{\text{س}}{2} \text{ ظل} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3} = \frac{\text{س}}{2} \text{ ظل}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\text{س}}{2} \text{ ظل} \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi 2}{3} + \pi 2 = \text{س} \text{ ظل} \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

حلل المعادلة ظل $\sqrt[3]{3} = \frac{\text{س}}{2}$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\text{س} = \frac{\pi 2}{3} + \pi 2 \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

(3) نعتبر المعادلة ظل 2 س = تظل س

$$\text{نعلم أن تظل س} = \text{ظل} \left(\text{س} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ظل 2 س} = \text{تظل س} \Leftrightarrow \text{ظل 2 س} = \text{ظل} \left(\text{س} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \text{س} + \pi 2 = \frac{\pi}{2} \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \pi 2 = \text{س} \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi 2}{3} = \text{س} \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

حلل المعادلة ظل 2 س = تظل س هي الأعداد الحقيقية س

$$\text{حيث : س} = \frac{\pi 2}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ ، ك } \ni \text{ ص}$$

تمارين

الزوايا الهندسية :

1. الأقياس α . β . γ لزوايا مثلث متناسبة ، على الترتيب . مع الأعداد 1 . 2 . 3 .

(1) أحسب هذه الأقياس بالدرجات وبالغرادات وبالراديانات

(2) م هي طبيعة هذا المثلث ؟

2. نفس الأسئلة إذا كانت α . β . γ متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 . 1 . 2 .

3. نفس الأسئلة إذا كانت α . β . γ متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 . 2 . 2 .

4. أحسب . بالراديانات . ثم بالغرادات . أقياس الزوايا التي أقياسها : 10° ؛ 18° ؛ 53° ؛ 1° ؛ 135° ؛ 200° .

5. أحسب . بالدرجات ، ثم بالغرادات . أقياس الزوايا التي أقياسها :

$$\frac{\pi}{5} \text{ رد} ؛ \frac{2\pi}{5} \text{ رد} ؛ \frac{3\pi}{5} \text{ رد} ؛ \frac{5\pi}{4} \text{ رد} ؛ \frac{3\pi}{8} \text{ رد} .$$

6. (1) عبّر . بالدرجات وبالغرادات . عن الأقياس :

$$\frac{\pi}{20} \text{ رد} ؛ \frac{7\pi}{6} \text{ رد} ؛ \frac{13\pi}{5} \text{ رد} ؛ 0.3 \text{ رد} ؛ 15.8 \text{ رد} .$$

(2) حوّل إلى الدرجات والراديانات الأقياس :

150 غر ؛ 25 غر ؛ 47,8 غر ؛ 1230 غر

(3) حوّل إلى الراديانات والغرادات الأقياس :

36° ؛ 345° ؛ 15° ؛ 702°

7. أحسب . بالراديانات وبالدرجات الزاوية المحصورة بين عقري ساعة عندما تشير هذه الساعة إلى :

• الساعة 12 و 30 د

• الساعة 1 و 20 د

• الساعة 2 و 55 د

8. $\widehat{AB} = 35^\circ$ و $\widehat{AC} = 80^\circ$.

أحسب \widehat{BC} وقيس زاوية المنصفين للزاويتين

$[A, B, C]$ و $[A, C, B]$

9. $\widehat{AB} = 35^\circ$ مثلث . ه نقطة تقاطع أعمدته .

أحسب \widehat{BHC} بدلالة \widehat{A} .

10. قيس قوس دائرة هو 50° وطول هذه القوس 3π سم .

ما هو نصف قطر هذه الدائرة ؟

11. دائرة (س) نصف قطرها 2 سم . A و B نقطتان من (س) .

إذا كان طول القوس \widehat{AB} يساوي 1 سم ، ما هو طول القوس \widehat{AB} ؟

12. دائرة (س) طولها 24 سم . A و B نقطتان من (س) حيث طول القوس \widehat{AB}

يساوي 9 سم .

ما هو قيس هذه القوس بالراديانات وبالدرجات ؟

13. لولب خطوته 2 مم (أي عندما يدور هذا اللولب دورة كاملة . ينغرز بعمق

قدره 2 مم) .

(1) بكم ينغرز هذا اللولب إذا دار بزاوية قدرها 63900° ؟


(2) ما هي الزاوية التي يدورها هذا اللولب إذا انغرز بعمق قدره 23 مم ؟

الأقواس الموجهة :

14. $\widehat{AB} = 35^\circ$ مثلث متقايس الأضلاع و (س) دائرة موجهة محيطة به . الاتجاه

الموجب على (س) هو الاتجاه من A نحو B .

عَيِّن قيساً مقدراً بالراديانات لكل من القوسين \widehat{AB} و \widehat{BA} .

الاتجاه السالب على (s) هو الاتجاه من الخلف.  عَيْن قِيساً مقدراً بالرادينات لكل واحدة من الأقواس 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. (s) دائرة موجهة و θ نقطة من (s).

الأعداد $\frac{\pi}{2}$. $\frac{\pi^3}{4}$. π . $\frac{\pi^3}{2}$. $\frac{\pi}{3}$. $\frac{\pi^3}{4}$. $\frac{\pi}{2}$ أقياساً على الترتيب . للأفواس هـ ا . ب . ج . د . ك . ل . م . ن هـ .
ما هي النقط المتقابلة قطرياً ؟

عَيْنَ قَيْسًا مُقَدَّرًا بِالرَّادِيَانَاتِ لِكُلِّ
قَوْسٍ مِنَ الْأَقْوَاسِ التَّالِيَةِ :

١. $\frac{1}{2}$ ٢. $\frac{1}{3}$ ٣. $\frac{1}{4}$ ٤. $\frac{1}{5}$ ٥. $\frac{1}{6}$ ٦. $\frac{1}{7}$ ٧. $\frac{1}{8}$ ٨. $\frac{1}{9}$ ٩. $\frac{1}{10}$

$$^04857 - \text{ ; } ^01650 \text{ ; } \text{ ; } \frac{\pi^{227}}{7} - \text{ ; } \text{ ; } \frac{\pi^{239}}{6} -$$

19. عَيِّن الأقياس الرئيسية للأقواس الموجهة التي أقياسها هي : $\frac{\pi 15}{2}$ ر د ؛

$${}_4d_3\pi 125 \quad {}_4d_3\frac{\pi 4}{3} \quad {}_4d_3\pi 128 \quad {}_4d_3\frac{\pi 57}{4} - \quad {}_4d_3\frac{\pi 172}{3}$$
$$4 \cdot 2, \frac{\pi 5}{6} - 4 \cdot 2, \pi^5 10 \quad 4 \cdot 2, \frac{\pi 5}{2} \quad 4 \cdot 2, \frac{\pi 11}{6} - 4 \cdot 2, \frac{\pi 2}{3} -$$
$$.5, \frac{\pi 110}{4} \quad .5, \frac{\pi 167}{5} \quad .5, \frac{\pi 28}{3} -$$

20. القيس الرئيسي لقوس موجهة هو 2 رد .

(1) أثبت أنه يوجد قيس وحيد α لهذه القوس حيث

$$\alpha \in [49 ; 49 + \pi 2]$$

(2) أثبت أنه يوجد قيس وحيد β لهذه القوس حيث

$$\beta \in [39 - \pi 2 ; 39 - \pi 2]$$

21. α ، β ، γ ثلاث نقط من دائرة موجهة ؛ α و β قياسان للقوسين \widehat{AB} و \widehat{BC} على الترتيب .

عَيِّن قيس القوس \widehat{AC} الذي يتعي إلى المجال $[0 , \pi 2]$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$\alpha = \frac{\pi 4}{3} \text{ و } \beta = \frac{\pi 5}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi 3}{4} \text{ و } \beta = \frac{\pi 3}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi 2}{3} \text{ و } \beta = \frac{\pi 3}{4}$$

$$\alpha = \frac{\pi 50}{3} \text{ و } \beta = \frac{\pi 7}{4}$$

22. (س) دائرة موجهة نصف قطرها 4 سم .

$$\alpha , \beta , \gamma \text{ ثلاث نقط من (س) بحيث يكون العددا } \frac{\pi 2}{3}$$

$$\text{و } \left(\frac{\pi}{3} - \right) \text{ قياسين ، على الترتيب ، للقوسين } \widehat{AB} \text{ و } \widehat{BC} .$$

(1) عَيِّن القيس الرئيسي للقوس \widehat{BC} .

(2) أحسب طولي القوسين \widehat{BC} و \widehat{AC} .

23. (٧) دائرة مثلثية و α نقطة منها .

عَيِّنْ النقطتين β و γ بحيث يكون العددا 1560 و (- 2025) قيسين ،
بالدرجات ، للقوسين α و β ، على الترتيب β ،
أحسب ، بالراديات ، القيس الرئيسي للقوس β و γ .

24. (٧) دائرة مثلثية نصف قطرها 5 سم .

تتحرك نقطة β على الدائرة (٧) ، في الاتجاه الموجب ، منطلقة من α ومستقرة
عند γ .

عَيِّنْ القيس الرئيسي للقوس α β إذا قطعت النقطة β مسافة قدرها 12 سم .

العلاقات المثلثية الأساسية :

25. s عدد حقيقي ، أثبت أن

$$(1) \text{ جب } s + \text{تجب } s = 2 \quad 1 = 2 + 1 \text{ جب } s \text{ تجب } s$$

$$(2) \text{ جب } s - \text{تجب } s = 2 \quad 1 = 2 - 1 \text{ جب } s \text{ تجب } s$$

$$(3) \text{ جب } s + \text{تجب } s = 2 \quad 2 = 2 + 2 \text{ جب } s - \text{تجب } s = 2$$

$$(4) \text{ جب } s^4 - \text{تجب } s^4 = \text{جب } s^2 - \text{تجب } s^2$$

26. s عدد حقيقي ، بسط ما يلي :

$$(1) \text{ ظل } s \text{ تجب } s$$

$$(2) \text{ جب } s^3 + \text{جب } s \text{ تجب } s^2$$

$$(3) 1 - \frac{1}{\text{تجب } s^2}$$

$$(4) \text{ جب } s^4 - \text{تجب } s^4$$

27. s عدد حقيقي ، أثبت أن :

$$(1) \frac{1}{\text{جب } s^2} = \frac{\text{تجب } s^2}{\text{تجب } s^2} + 1$$

$$(2) \frac{1}{\text{تجب } s^2} = \frac{\text{جب } s^2}{\text{جب } s^2} + 1$$

$$(3) \quad \frac{1 - \text{تجب س}}{\text{جب س}} = \frac{1 + \text{تجب س}}{\text{جب س}}$$

$$(4) \quad \frac{1 - \text{تجب س}}{\text{تجب س}} = \frac{1 + \text{تجب س}}{\text{تجب س}}$$

$$28. \text{ أحسب تجب س و جب س إذا كان } \pi > \text{س} > \frac{\pi}{2} \text{ وظل س} = 2$$

$$29. \text{ أحسب تجب س و جب س إذا كان } \pi > \text{س} > \frac{\pi}{3} \text{ وظل س} = \frac{1}{3}$$

$$30. \text{ أحسب جب س وظل س علما أن } -\frac{\pi}{2} > \text{س} > 0 \text{ وتجب س} = -0,3$$

$$31. \text{ أحسب تجب س وظل س إذا كان } \pi > \text{س} > \frac{\pi}{2} \text{ و جب س} = -0,6$$

$$32. \text{ أثبت أن : } (1 + \text{ظل س}^2 = 1 + \text{ظل ع}^2) \Leftrightarrow (\text{تجب س}^2 = \text{تجب ع}^2)$$

$$33. \text{ س عدد حقيقي حيث } 0 \leq \text{س} < \frac{\pi}{2}$$

$$(1) \text{ أثبت أن } \text{تجب س}^2 = \frac{1}{1 + \text{ظل س}^2}$$

$$(2) \text{ أحسب جب س وتجب س علما أن ظل س} = 1,5$$

$$34. \text{ س و ع قيسان . بالراديان . لزاويتين}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{تجب س}^2 + \text{تجب ع}^2 = 1 \\ \text{جب س}^2 + \text{جب ع}^2 = 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} = \text{ع} + \text{س} \right)$$

$$35. \text{ س و ع قيسان . بالراديان لزاويتين}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{تجب س}^2 + \text{جب ع}^2 = 1 \\ \text{جب س}^2 + \text{تجب ع}^2 = 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow (\pi = \text{ع} + \text{س})$$

$$36. \text{ م ح مثلث متساوي الساقين رأسه م}$$

$$\text{نسمي ك المسقط العمودي للنقطة م على المستقيم (م ح)}$$

و ل المسقط العمودي للنقطة ب على المستقيم (ا ح)

(1) أثبت أن : $\widehat{ب ا ك} = \widehat{ح م ل}$

(2) نضع $ا م = ط$.

α قيس . بالراديان للزاوية [ا م ، ا ك] حيث $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4} , 0 \right]$

أثبت أن : $م ح = 2 ط جب \alpha$ ؛ $م ل = ط جب 2 \alpha$ ؛ $\frac{م ل}{م ح} = \frac{1}{2} \tan \alpha$
أستنتج أن :

$$جب 2 \alpha = 2 جب \alpha \tan \alpha$$

37. (د) دائرة مركزها م ونصف قطرها ب.

ا و ب نقطتان متقابلتان قطريا في الدائرة (د) و ه نقطة من (د) تختلف ع ا و ب

α قيس ، بالراديان ، للزاوية [ا م ، ا ه]

(1) أحسب المسافتين ه ا و ه ب بدلالة α و ب.

(2) نسمي ه نقطة تقاطع المستقيم (ا ه) و المماس في النقطة ب للدائرة (د).

أحسب المسافات ه ا ، ه ب ، ه م ، ه ب بدلالة α و ب.

(3) أدرس الحالات الخاصة التالية :

$$\frac{\pi}{3} = \alpha , \frac{\pi}{4} = \alpha , \frac{\pi}{6} = \alpha$$

38. ا ب ح مثلث قائم في الزاوية ا و ا ب ح = 60°

(1) أحسب $\widehat{ا ح ب}$ ، بالدرجات

(2) ب هي نظيرة النقطة ب بالنسبة إلى النقطة ا

ما هي طبيعة المثلث ب ح ب'

(3) نضع $ب ح = ط$ ؛ $ا ح = ك$ ؛ $ا ب = ل$

• أحسب ا ب و ا ح بدلالة ط

• أحسب ا ب و ب ح بدلالة ك

• أحسب ا ح و ب ح بدلالة ل

39. $\alpha = \beta$ مثلث متساوي الساقين حيث $\alpha = \beta$
 α المسقط العمودي للنقطة α على (β) و β المسقط العمودي للنقطة β
 على (α)

نضع : $\alpha = \beta$ و $\alpha = \beta$ $\alpha = 2$
 (1) أحسب الأطوال α ، β ، α ، β ، α ، β بدلالة
 العددين α و β

(2) بالتعبير عن الطول α بطريقتين مختلفتين
 أثبت أن : $\alpha = 2$ جب α تجب α

(3) بالتعبير عن الطول α بطريقتين مختلفتين
 أثبت أن : $\alpha = 2$ جب $1 - \alpha = 2$ جب α^2
 و $\alpha = 2$ جب α^2 - $\alpha = 2$ جب α^2

(4). عبّر عن الاعداد الحقيقية التالية بواسطة جب α ، β ، α ، β ، α ، β ،
 تظل α

$$(1) \text{ تجب } \left(\alpha + \frac{\pi 3}{2} \right) \quad (7) \text{ جب } \left(\alpha - \frac{\pi 5}{2} \right)$$

$$(2) \text{ تجب } \left(\alpha + \pi 7 \right) \quad (8) \text{ جب } \left(\alpha + \frac{\pi 5}{2} \right)$$

$$(3) \text{ تجب } \left(\alpha - \frac{\pi 7}{2} \right) \quad (9) \text{ ظل } \left(\alpha - \pi 5 \right)$$

$$(4) \text{ تجب } \left(\alpha + \frac{\pi 5}{2} \right) \quad (10) \text{ ظل } \left(\alpha + \frac{\pi 3}{2} \right)$$

$$(5) \text{ جب } \left(\alpha - \frac{\pi 3}{2} \right) \quad (11) \text{ ظل } \left(\alpha - \frac{\pi 9}{2} \right)$$

$$(6) \text{ جب } \left(\alpha - \pi 9 \right) \quad (12) \text{ ظل } \left(\alpha + \pi 3 \right)$$

١. +. عدد حقيقي . أحسب المجاميع التالية :

$$(1) \text{ تجب } (\pi + \alpha) + \text{ تجب } (\pi + 2\alpha) + \text{ تجب } (\pi - \alpha) + \text{ تجب } (\pi - 3\alpha)$$

$$(2) \text{ تجب } \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \text{ جب } (\alpha - \pi) + \text{ جب } (\alpha + \pi)$$

$$(3) \text{ جب } \left(\alpha + \frac{\pi 3}{2} \right) + \text{ تجب } \left(\alpha - \frac{\pi 7}{2} \right) + \text{ جب } (\alpha + \pi 3)$$

$$- \text{ تجب } (\alpha - \pi 7)$$

$$(4) \text{ ظل } (\alpha - \pi) + \text{ ظل } (\pi + \alpha) + \text{ ظل } (\alpha - \pi 2) + \text{ ظل } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$(5) \text{ ظل } \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \text{ ظل } \left(\frac{\pi 3}{2} + \alpha \right) + \text{ ظل } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \text{ ظل } \left(\frac{\pi 5}{2} + \alpha \right)$$

٢. س عدد حقيقي ، بسط المجاميع التالية :

$$(1) 1 + \text{ تجب } (\pi - \pi) + \text{ تجب } (\pi - \pi)^2$$

$$(2) \text{ جب } (\pi - \pi)^2 - 2 \text{ جب } (\pi - \pi) + 3$$

$$(3) \text{ جب } \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)^3 + \text{ تجب } \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)^3 - \text{ تجب } \pi - \text{ جب } \pi$$

$$(4) \text{ تجب } \left[\left(\pi + \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] + \text{ جب } \left[\left(\pi + \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]$$

المعادلات المثلثية الأساسية :

١. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

$$(1) \text{ تجب } \pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \text{ تجب } \left(\pi - 2\pi \right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$(3) \quad 0 = 1 + \sin^2 4$$

$$(4) \quad 0 = 1 - \sin^2 4$$

$$(5) \quad 1 = \left(\frac{\pi}{3} - \sin 3 \right) \sin 2$$

$$(6) \quad \sin 2 = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$(7) \quad 1 = \sin^2 2$$

$$(8) \quad 0 = 1 + \sin 2$$

$$(9) \quad \sin 3 = \sin \left(\frac{\pi}{7} - \sin \right)$$

$$(10) \quad \sin 5 = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \sin 2 \right)$$

$$(11) \quad \sin \left(\frac{\pi}{3} + \sin 2 \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \sin 3 \right)$$

++ . حل . في ح ، المعادلات التالية :

$$(1) \quad \sin = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \sin 5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$(3) \quad 0 = 3 + \sin^2 2$$

$$(4) \quad 0 = 3 - \sin^2 2$$

$$(5) \quad 0 = 1 - \sin^2 4$$

$$(6) \quad 1 = \sin 3$$

$$(7) \quad 0 = 2 + \sin 2$$

$$(8) \quad \sqrt[3]{2} = \sin 2 = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \sin \right)$$

$$(9) \text{ جب } 2 \text{ س} = \text{جب} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(10) \text{ جب} \left(\frac{\pi}{3} + \text{س} \right) = \text{جب} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right)$$

$$(11) \text{ جب} \left(\frac{\pi}{3} + 2 \text{ س} \right) = \text{جب} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

١٠. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

$$(1) \text{ ظل س} = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \text{ ظل س} = 1$$

$$(3) \text{ ظل}^2 \text{ س} - 3 = 0$$

$$(4) \text{ ظل} \left(\frac{\pi}{4} - 2 \text{ س} \right) = \sqrt[3]{3}$$

$$(5) \text{ ظل} \left(\frac{\pi}{3} - \text{س} \right) + \sqrt[3]{3} = 0$$

$$(6) \text{ ظل} 3 \text{ س} = \text{ظل} \left(\frac{\pi}{3} - 2 \text{ س} \right)$$

$$(7) \text{ ظل} 3 \text{ س} = \text{ظل} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right)$$

$$(8) \text{ ظل} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{3} \right) = \text{ظل} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\text{س}}{2} \right)$$

١١. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

$$(1) \text{ جب}^2 \text{ س} - 3 \text{ جب س} + 1 = 0$$

$$(2) 2 \text{ تجب}^2 \text{ س} - 7 \text{ تجب س} + 3 = 0$$

$$(3) 4 \text{ جب}^2 \text{ س} - 2 (\sqrt[3]{3} - 1) \text{ جب س} - \sqrt[3]{3} = 0$$

$$(4) \text{ ظل}^2 \text{ س} + (1 + \sqrt[3]{3}) \text{ ظل س} + \sqrt[3]{3} = 0$$

$$(5) \quad 2 \text{ نجب } 2^2 \text{ س} - 3 \text{ نجب } 2 \text{ س} + 1 = 0$$

47. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

$$(1) \quad \text{نجب} \left(\frac{\pi}{3} + 6 \text{ س} \right) = \text{نجب} \left(\frac{\pi}{6} - 2 \text{ س} \right) \quad \text{و} \quad 0 \leq \text{س} \leq \pi$$

$$(2) \quad \text{جب س} = \text{جب} \frac{\pi}{10} \quad \text{و} \quad \text{نجب س} > 0$$

$$(3) \quad \text{جب } 2 \text{ س} = \text{جب} \left(3 - \frac{\pi}{2} \text{ س} \right) \quad \text{و} \quad \pi - \text{س} > \text{س} > \pi/3$$

$$(4) \quad \text{نجب } 2 \text{ س} = - \text{نجب س} \quad \text{و} \quad 0 \leq \text{س} < \pi$$

الباب الثامن

الدوال العددية

27 - عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

28 - الدالة التآلفية

29 - الدالة $s \mapsto s + s^2 + s^3 + \dots$ ($0 \neq 1$)

30 - الدالة $s \mapsto \frac{1}{s}$ ($0 \neq 1$)

لقد قدمت في السنة السابقة بعض المفاهيم المتعلقة بالتطبيقات التآلفية (التغيرات ، التمثيل البياني) . في هذه السنة ، نعمم هذه المفاهيم ونقدم نتائج تمكن التلاميذ من دراسة كاملة لدوال عددية أخرى :

$s \mapsto s + s^2 + s^3 + \dots$ ($0 \neq 1$)

$s \mapsto \frac{1}{s}$ ($0 \neq 1$)

وتطبيقا لما ورد في البرنامج فإن مفهومي النهاية والمستقيم المقارب قد تم استخراجها انطلاقا من أمثلة بسيطة

عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

1 - الدوال العددية لمتغير حقيقي :

تعريف

تسمى كل دالة لمجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} في نفسها دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f دالة عددية للمتغير الحقيقي x فإن العنصر $f(x)$ يسمى صورة العنصر x بالدالة f
 العنصر x يسمى سابقة للعنصر $f(x)$
 مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة عناصر المجموعة \mathbb{R} التي لها صورة في \mathbb{R} بالدالة f

أمثلة :

(1) الدالة f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^2$$

هي دالة عددية للمتغير الحقيقي x
 مجموعة تعريفها هي المجموعة \mathbb{R}
 $f(x) = 3x^2$ فـ

(2) الدالة f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

مجموعة تعريفها هي المجموعة \mathbb{R} باستثناء 1
 فـ $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ، $f(1) \notin \mathbb{R}$ ، $f(x) \in \mathbb{R}$ ، $f(x) \in \mathbb{R}$

$$(3) \text{ الدالة } \mathcal{E} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \text{ } \sqrt{s-2}$$

هي دالة عددية للمتغير الحقيقي s

تكون هذه الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان $s-2 \geq 0$

$$\mathcal{E} = [2, \infty[$$

(4) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي s العدد الحقيقي $\zeta(s)$ هي دالة عددية للمتغير الحقيقي s وتسمى الدالة جيب تمام

$$\zeta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$s \rightarrow \zeta(s)$$

مجموعة تعريفها هي المجموعة \mathcal{C}

(5) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي s العدد الحقيقي $\eta(s)$ هي دالة عددية للمتغير الحقيقي s وتسمى الدالة الجيب

$$\eta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$s \rightarrow \eta(s)$$

مجموعة تعريفها هي المجموعة \mathcal{C}

(6) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي s العدد الحقيقي $\xi(s)$ هي دالة عددية للمتغير الحقيقي s وتسمى الدالة الظل

$$\xi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$s \rightarrow \xi(s)$$

نعلم أن $\xi(s)$ معرف إذا وفقط إذا كان $\zeta(s) \neq 0$

$$\zeta(s) = 0 \Leftrightarrow \zeta(s) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow s = \pi + \frac{\pi}{2} \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

إذن مجموعة تعريف الدالة الظل هي المجموعة ح باستثناء الأعداد الحقيقية

$$\text{من الشكل } \pi + \frac{\pi}{2} \text{ ك ، (ك } \neq \text{ صـ)}$$

2 - اتجاه تغير دالة على مجال

1.2 - تعاريف :

لقد رأينا في السنة السابقة ما يلي :

إذا اعتبرنا ، مثلا ، الدالة تا : $s \mapsto 3s$

وأخذنا عددين كفيين s_1 و s_2 فإن العددين تا(s_1) و تا(s_2) مرتان في نفس الترتيب بالنسبة لترتيب العددين s_1 و s_2 وقلنا إن الدالة تا متزايدة تماما على ح .

وإذا اعتبرنا الدالة ها : $s \mapsto 2 - s$ وأخذنا عددين كفيين s_1 و s_2 فإن العددين ها(s_1) و ها(s_2) مرتان في الترتيب العكسي بالنسبة لترتيب العددين s_1 و s_2 وقلنا إن الدالة ها متناقصة تماما على ح وبصورة عامة يمكن إعطاء التعاريف التالية :

تا دالة عددية معرفة على مجال ل .

تعريف 1 :

تكون تا متزايدة تماما على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

$$\forall s_1 \in L , \forall s_2 \in L : s_1 < s_2 \Rightarrow \text{تا}(s_1) < \text{تا}(s_2)$$

تعريف 2 :

تكون تا متزايدة على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

$$\forall s_1 \in L , \forall s_2 \in L : s_1 < s_2 \Rightarrow \text{تا}(s_1) \leq \text{تا}(s_2)$$

تعريف 3 :

تكون تا متناقصة تماما على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

$$\forall s_1 \in L , \forall s_2 \in L : s_1 < s_2 \Rightarrow \text{تا}(s_1) > \text{تا}(s_2)$$

تعريف 4 :

تكون τ متناقصة على L إذا وفقط إذا تحقق ما يلي
 $\forall s_1 \in L, \forall s_2 \in L : s_1 > s_2 \Rightarrow \tau(s_1) \leq \tau(s_2)$

تعريف 5 :

تكون τ ثابتة على L إذا وفقط إذا تحقق ما يلي
 $\forall s_1 \in L, \forall s_2 \in L : \tau(s_1) = \tau(s_2)$

إذا كانت الدالة τ إما متناقصة وإما متزايدة على L فنقول إنها رتيبة على L
 أمثلة :

(1) الدالة العددية $\tau : s \mapsto s^2$ متزايدة تماماً على المجال $[0, +\infty[$

لأن : $0 \leq s_1 < s_2 \Rightarrow s_1^2 < s_2^2$

(2) الدالة العددية $\tau : s \mapsto s^2$ متناقصة تماماً على المجال $] -\infty, 0]$

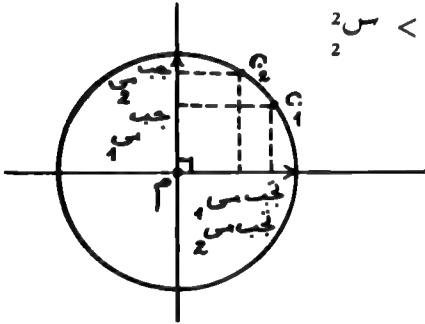
لأن : $s_1 < s_2 \leq 0 \Rightarrow s_1^2 > s_2^2$

(3) نعتبر الدالتين العدديتين

$s \mapsto \sin s$

$s \mapsto \cos s$

باستعمال الدائرة المثلثية نلاحظ



أنه إذا كان : $0 \leq s_1 < s_2 \leq \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin s_1 < \sin s_2$ و $\cos s_1 > \cos s_2$

وإذا كان : $0 \leq s_1 < s_2 \leq \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin s_1 < \sin s_2$ و $\cos s_1 > \cos s_2$

الدالة الجيب متزايدة تماماً على $[0, \frac{\pi}{2}]$ والدالة الجيب تمام متناقصة تماماً

على $[\frac{\pi}{2}, 0]$

2.2 - نسبة تزايد دالة

إذا كانت دالة عددية τ متزايدة على مجال L فإن النسبة $\frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2}$ تكون موجبة مهما يكن العددين الحقيقيان المختلفان s_1 و s_2 وإذا كانت τ متناقصة على L فإن النسبة $\frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2}$ تكون سالبة مهما يكن العددين الحقيقيان المختلفان s_1 و s_2 .

تعريف :

تسمى النسبة $\frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2}$ نسبة تزايد الدالة τ بين العددين الحقيقيين المختلفين s_1 و s_2 .

من هذا التعريف ومن التعاريف السابقة نستنتج ما يلي

- τ متزايدة تماماً على $L \Leftrightarrow \forall s_1 \in L, \forall s_2 \in L, (s_1 \neq s_2) \Rightarrow \frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2} > 0$

$$0 < \frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2}$$

- τ متزايدة على $L \Leftrightarrow \forall s_1 \in L, \forall s_2 \in L, (s_1 \neq s_2) \Rightarrow \frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2} \geq 0$

$$0 \leq \frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2}$$

- τ متناقصة تماماً على $L \Leftrightarrow \forall s_1 \in L, \forall s_2 \in L, (s_1 \neq s_2) \Rightarrow \frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2} < 0$

$$0 > \frac{\tau(s_1) - \tau(s_2)}{s_1 - s_2}$$

• تا متناقصة على ل $\Leftrightarrow \forall s_1 \in L, \exists s_2 \in L (s_1 \neq s_2)$

$$0 \geq \frac{(s_1) - (s_2)}{s_1 - s_2}$$

• تا ثابتة على ل $\Leftrightarrow \forall s_1 \in L, \exists s_2 \in L (s_1 \neq s_2)$

$$0 = \frac{(s_1) - (s_2)}{s_1 - s_2}$$

3.2 - جدول تغيرات دالة

إن دراسة تغيرات دالة تا تعني تعيين المجالات من مجموعة تعريفها التي تكون فيها تا متزايدة والمجالات التي تكون فيها تا متناقصة
تسجل نتائج هذه الدراسة في جدول يسمى جدول تغيرات تا
إذا كانت تا متزايدة على المجال $[f, b]$ نرسم الجدول التالي

س	ب
↑	↑

و إذا كانت متناقصة على المجال $[f, b]$ نرسم الجدول التالي :

س	ب
↓	↓

3 - التمثيل البياني لدالة

المستوي منسوب إلى معلم (م، و، ي)

1.3 - تعريف :

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف

المنحنى (ي) الممثل للدالة تا في المعلم (م، و، ي) هو مجموعة
النقط (s, e) من المستوي بحيث يكون :
 $s \in F$ و $e = ta(s)$

المعادلة $E = TA$ (س) تسمى معادلة المنحنى (ي)

مثال :

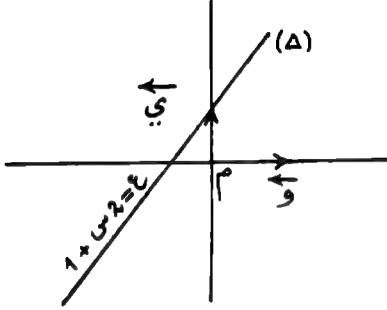
المنحنى الممثل للدالة TA : $S \leftrightarrow 2S + 1$

هو مجموعة النقط (S, E) من المستوي بحيث يكون

$$S \in H \text{ و } E = 2S + 1$$

ونعلم أن $E = 2S + 1$

هي معادلة مستقيم (Δ)



2.3 - العناصر التي تساعد على رسم المنحنيات

• الدوال الزوجية

تأ دالة عددية معرفة على المجموعة F من H

تكون الدالة TA زوجية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

$$\forall S \in F : -S \in F \text{ و } TA(-S) = TA(S)$$

أمثلة :

(1) الدالة العددية $S \mapsto S^2$ زوجية لأنه :

$$\forall S \in H : -S \in H \text{ و } (-S)^2 = S^2$$

(2) الدالة العددية $S \mapsto \frac{1}{|S|}$ زوجية لأنه

$$\forall S \in H : -S \in H \text{ و } \frac{1}{|-S|} = \frac{1}{|S|}$$

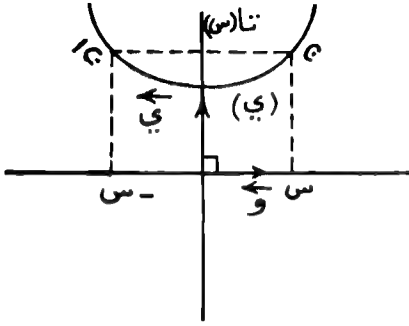
(3) الدالة العددية $s \mapsto \text{تج} s$ زوجية لأنه
 $\forall s \in \mathcal{C} : -s \in \mathcal{C} \text{ و } \text{تج}(-s) = \text{تج} s$

إذا كانت الدالة تا زوجية وكان

(ي) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد
 (م. و. ي) فإن النقطتين

$$s, \text{تا}(s) \text{ و } -s, \text{تا}(-s)$$

$$s, -s, \text{تا}(-s) \text{ لهما}$$



فاصلتان متعاكستان وترتيبان متساويان ، فهما متناظرتان بالنسبة إلى محور الترتيب

محور الترتيب هو محور تناظر للمنحني (ي)

• الدوال الفردية :

تا دالة عددية معرفة على المجموعة \mathcal{F} من \mathcal{C}

تكون الدالة تا فردية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي
 $\forall s \in \mathcal{F} : -s \in \mathcal{F} \text{ و } \text{تا}(-s) = -\text{تا}(s)$

أمثلة :

(1) الدالة العددية $s \mapsto \frac{2}{s}$ فردية لأن :

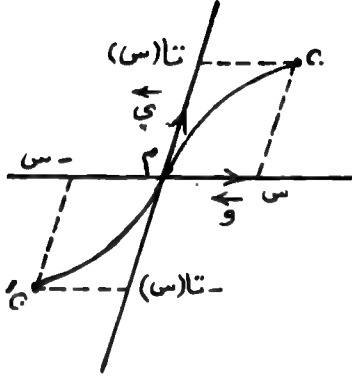
$$\forall s \in \mathcal{C} : -s \in \mathcal{C} \text{ و } \frac{2}{-s} = -\frac{2}{s}$$

(2) الدالة العددية $s \mapsto \text{ج} s$ فردية لأن :

$$\forall s \in \mathbb{C} : -s \in \mathbb{C} \text{ و } \text{ج}(-s) = -\text{ج} s$$

(3) الدالة العددية $s \mapsto s^3$ فردية لأن :

$$\forall s \in \mathbb{C} : -s \in \mathbb{C} \text{ و } (-s)^3 = -s^3$$



إذا كانت الدالة \tan فردية وكان

(ي) تمثيلها البياني في المعلم

(م. و. ي) فإن النقطتين

$$(s, \tan(s)) \text{ و } (-s, -\tan(s))$$

و هما فاصلتان متعاكستان وترتيبان

متعاكسان فهما متناظرتان بالنسبة إلى النقطة م

المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (ي)

1 - تعريف :

نسمي دالة تآلفية كل دالة عددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

تا $(x) = ax + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان

- إذا كان b معدوماً نقول إن الدالة f خطية
- إذا كان a معدوماً تكون الدالة f ثابتة

أمثلة :

- (1) الدالة : $f(x) = 2x + 1$ تآلفية .
- (2) الدالة : $f(x) = 4x$ تآلفية وهي خطية
- (3) الدالة : $f(x) = 5$ تآلفية وهي ثابتة
- (4) الدالة : $f(x) = x^2 + 1$ ليست تآلفية .

2 - دراسة الدالة $f(x) = 4x$:

- مجموعة التعريف : الدالة f معرفة على \mathbb{R} .
- اتجاه التغير

مهما يكن العدنان الحقيقيان x_1 و x_2 لدينا :

$$f(x_2) - f(x_1) = 4x_2 - 4x_1 = 4(x_2 - x_1)$$

بما أن هذه النسبة موجبة تماماً فإن الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

- دراسة الدالة f من أجل القيم الكبيرة للعدد $|x|$:

الجدول التالي يعطي بعض القيم الكبيرة للعدد س
وقيم تا (س) المناسبة لها .

س	10	10^2	10^3	10^4
تا (س)	40	400	4000	40000

نلاحظ أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .
والسؤال الذي يمكن طرحه هو : هل يمكن جعل تا (س) كبيراً بالقدر
الذي نريده ؟

وبتعبير آخر : هل يمكن جعل تا (س) أكبر من أي عدد معلوم ل ؟
لدينا :

$$\text{تا (س)} < 4 \Leftrightarrow \text{ل} < 4$$

$$\Leftrightarrow \text{س} < \frac{\text{ل}}{4}$$

إذن للحصول على تا (س) < ل يكفي أخذ س < $\frac{\text{ل}}{4}$ (مثلاً لكي يكون

$$\text{تا (س)} < 10^9 \text{ يكفي أخذ س } < 10^9 \frac{1}{4}$$

ونعبر عن هذه الحالة بالقول :

إن تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب : تا (س) $\leftarrow + \infty$ عندما س $\leftarrow + \infty$

ومن جهة أخرى نلاحظ ، في الجدول التالي :

س	$10^2 -$	$10^3 -$	$10^4 -$	$10^5 -$
تا (س)	40 -	400 -	4000 -	40000 -

أن قيم (- تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون (- س) كبيراً . ويمكن ، هنا ، القول إن :

$$(- \text{تا} (س)) \rightarrow +\infty \text{ عندما } (- س) \rightarrow +\infty$$

نقول ، في هذه الحالة ، إن :

تا (س) يؤول إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

$$\text{ونكتب : } (- \text{تا} (س)) \rightarrow -\infty \text{ عندما } س \rightarrow -\infty$$

• جدول التغيرات :

نسجل في الجدول التالي نتائج الدراسة السابقة :

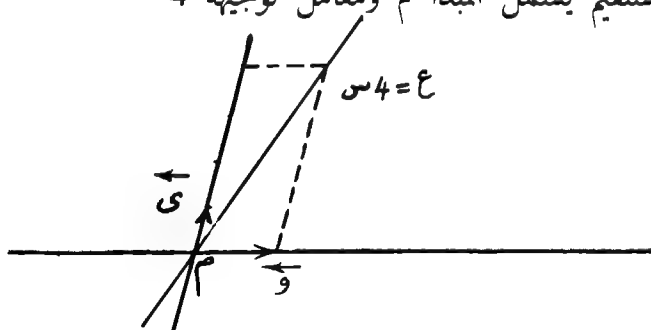


• التمثيل البياني : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م . و . س) المنحني الممثل للدالة تا : س \rightarrow 4 س هو مجموعة النقط (س . ع) من المستوي حيث :

$$س = 4 ع \text{ و } ع = 4 س$$

ونعلم أن ع = 4 س هي معادلة مستقيم .

هذا المستقيم يشمل المبدأ م ومعامل توجيهه 4



3 - دراسة الدالة تا : س \rightarrow 2 س + 1 :

• مجموعة التعريف : الدالة تا معرفة على ح .

• اتجاه التغير

مهما كان العدداً الحقيقيان المختلفان s_1 و s_2 لدينا :

$$\frac{(1 + s_2 - 2) - (1 + s_1 - 2)}{s_2 - s_1} = \frac{(s_2 - 1) - (s_1 - 1)}{s_2 - s_1} = \frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_1} = 1$$

بما أن هذه النسبة سالبة تماماً فإن الدالة Δ متناقصة تماماً على \mathbb{R} .

• دراسة الدالة Δ من أجل القيم الكبيرة للعدد $|s|$

الجدول التالي يعطي بعض القيم الكبيرة للعدد s وقيم $\Delta(s)$ المناسبة لها :

s	10	10^2	10^3	10^4
$\Delta(s)$	$19 -$	$199 -$	$1999 -$	$19999 -$

نلاحظ أن قيم $\Delta(s)$ تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون s كبيراً .

نفس السؤال الذي طرح في المثال السابق يمكن طرحه هنا : هل يمكن جعل $\Delta(s)$ أكبر من أي عدد معلوم L ؟ لدينا :

$$\Delta(s) < L \Leftrightarrow (1 + s - 2) < L \Leftrightarrow s < \frac{L+1}{2}$$

إذن :

لكي يكون $\Delta(s)$ أكبر من أي عدد معلوم L يكفي أخذ $s < \frac{L+1}{2}$ مثلاً

4 - دراسة الدالة التآلفية تا : س ← ف س + ب

• مجموعة التعريف :

الدالة التآلفية س ← ف س + ب معرفة على ج .

• اتجاه التغير

مهما كان العددا الحقيقيان المختلفان س₁ و س₂ لدينا :

$$\frac{\text{تا} (س_1) - \text{تا} (س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(ف س_1 + ب) - (ف س_2 + ب)}{س_1 - س_2} = \frac{ف (س_1 - س_2)}{س_1 - س_2} = ف$$

نميز ثلاث حالات :

إذا كان ف = 0 تكون الدالة تا ثابتة على ج .

إذا كان ف < 0 تكون الدالة تا متزايدة تماما على ج .

إذا كان ف > 0 تكون الدالة تا متناقصة تماما على ج .

• دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س|

كما رأينا في المثالين السابقين يمكن التأكد من النتائج التالية :

(1) إذا كان ف < 0 فإن :

تا (س) ← ∞ عندما س → ∞

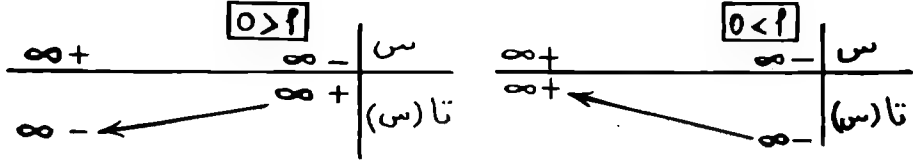
تا (س) ← -∞ عندما س → -∞

(2) إذا كان ف > 0 فإن :

تا (س) ← -∞ عندما س → ∞

تا (س) ← ∞ عندما س → -∞

• جدول التغيرات :



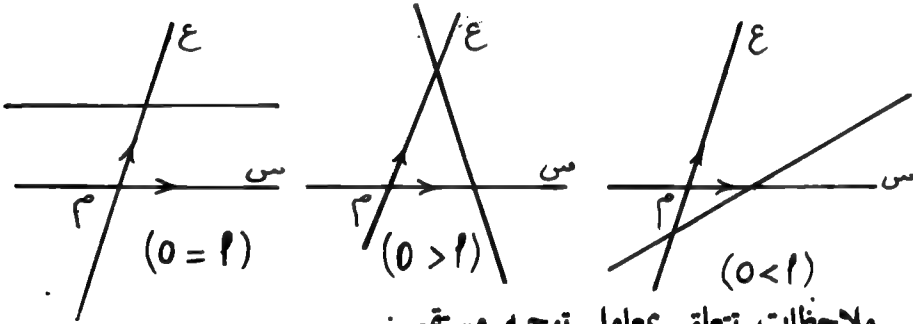
• التمثيل البياني : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، و ، ع) المنحني

الممثل للدالة التآلفية $s \mapsto s + b$

هو مجموعة النقط $\mathcal{C}(s, e)$ من المستوي حيث :

$$s \in \mathcal{C} \text{ و } e = s + b.$$

ونعلم أن $e = s + b$ هي معادلة مستقيم معامل توجيهه I .



ملاحظات تتعلق بمعامل توجيه مستقيم :

نذكر فيما يلي بعض النتائج المتعلقة بمعامل توجيه مستقيم :

• معامل توجيه المستقيم الذي يشمل التقطتين $\mathcal{C}_1(s_1, e_1)$

$$\text{و } \mathcal{C}_2(s_2, e_2) \text{ حيث } s_1 \neq s_2 \text{ هو النسبة : } \frac{e_2 - e_1}{s_2 - s_1}$$

• إذا كان I و I' معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') فإن :

$$(\Delta') // (\Delta) \Leftrightarrow I' = I$$

• إذا كان I و I' معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') وكان المعلم

متعامداً ومتجانساً فإن :

$$(\Delta') \perp (\Delta) \Leftrightarrow I' = -I$$

الدالة $s \mapsto s^2 + s + 1$ ($0 \neq 1$)

1 - دراسة الدالة τ : $s \mapsto s^2$:

• مجموعة التعريف :

الدالة τ معرفة على \mathbb{C} .

• اتجاه التغير :

مهما كان العددين الحقيقيان المختلفان s_1 و s_2 لدينا :

$$\begin{aligned} \tau(s_1) - \tau(s_2) &= (s_1^2 - s_2^2) = \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1 - s_2} \\ &= \frac{(s_1 - s_2)(s_1 + s_2)}{s_1 - s_2} = s_1 + s_2 \end{aligned}$$

إذا كان $s_1 \leq 0$ و $s_2 \leq 0$ و $s_1 \neq s_2$ فإن : $s_1 + s_2 < 0$

وإذا كان $s_1 \geq 0$ و $s_2 \geq 0$ و $s_1 \neq s_2$ فإن : $s_1 + s_2 > 0$

إذن :

الدالة τ متناقصة تماماً على $[-\infty, 0]$ و متزايدة تماماً على $[0, +\infty]$.
لدينا :

$\tau(0) = 0$ و $\forall s \in \mathbb{C} : \tau(s) \leq \tau(0)$

يسمى العدد $\tau(0)$ القيمة الصغرى للدالة τ .

• دراسة الدالة τ من أجل القيم الكبيرة للعدد $|s|$.

نلاحظ ، في الجدول التالي ، أن قيم $\tau(s)$ تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون s كبيراً .

s	10	10^2	10^3	10^4
$\tau(s)$	10^2	10^4	10^6	10^8

لنفرض أن s موجب ولنبرهن أنه يمكن جعل $\tau(s)$ أكبر من أي عدد معلوم موجب l .

$$\tau(s) < l \iff s < l^2$$

$$\iff s < \sqrt{l} \quad (\text{لأن } s \text{ موجب})$$

لكي يكون $\tau(s) < l$ يكفي أخذ $s < \sqrt{l}$ (مثلاً للحصول على $\tau(s) < 10^{12}$ يكفي أخذ $s < 10^6$).

نبر عن هذه الحالة بالقول :

إن $\tau(s)$ يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول s إلى ما لا نهاية ونكتب :

$$\tau(s) \leftarrow \infty \text{ عندما } s \leftarrow \infty$$

وبطريقة مماثلة نحصل على ما يلي :

يؤول $\tau(s)$ إلى ما لا نهاية عندما يؤول $(-s)$ إلى ما لا نهاية .

نقول . في هذه الحالة إن :

$\tau(s)$ يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول s إلى ناقص ما لا نهاية . ونكتب :

$$\tau(s) \leftarrow \infty \text{ عندما } s \leftarrow -\infty$$

• جدول التغيرات :

$\infty +$	0	$\infty -$	s
$\infty +$		$\infty +$	$\tau(s)$
	0		

• التمثيل البياني :

المستوي منسوب إلى المعلم (م . و . ع) .

المنحني المثل للدالة $s \leftarrow s^2$ هو مجموعة النقط $\in (s, e)$ من

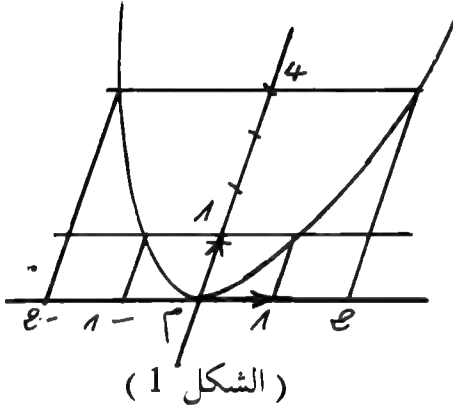
المستوي حيث $s \in \mathbb{R}$ و $e = s^2$.

لرسم هذا المنحني ننشيء بعض النقط منه .

الجدول التالي يعطي إحداثيات هذه النقط

3	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	س
9	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9	ع = س ²

يسمى هذا المنحني قطعاً مكافئاً (الشكل 1)



نلاحظ أن هذا المنحني يشمل النقطة م وإذا أنشأنا عدة نقط مجاورة للنقطة م نحصل على منحني له المظهر المبين في الشكل المجاور .

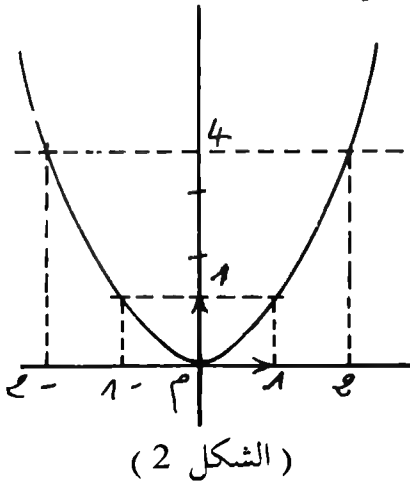
من جهة أخرى نلاحظ أن الدالة تا زوجية :

$$\forall س \ni ح : (-س) \ni ح$$

$$\text{و تا} (س) = \text{تا} (-س)$$

إذن ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ، محور الترتيب هو محور تناظر للمنحني . (الشكل 2)

تسمى النقطة م ذروة القطع المكافئ



2 - دراسة الدالة تا : س ← 2 - س² + 3

• مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة على ح .

• اتجاه التغير :

مهما يكن العددين الحقيقيان المختلفان س₁ و س₂ لدينا :

$$\text{تا}(س_1) - \text{تا}(س_2) = \frac{(3 + س_1^2 - 2س_1) - (3 + س_2^2 - 2س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(س_1^2 - س_2^2) - 2(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(س_1 - س_2)(س_1 + س_2) - 2(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= س_1 + س_2 - 2$$

$$= (س_1 + س_2) - 2$$

إذا كان س₁ ≤ 0 و س₂ ≤ 0 و س₁ ≠ س₂ فإن :

$$(س_1 + س_2) - 2 > 0$$

إذا كان س₁ ≥ 0 و س₂ ≥ 0 و س₁ ≠ س₂ فإن :

$$(س_1 + س_2) - 2 < 0$$

إذن :

الدالة تا متزايدة تماماً على [0 ، ∞ [ومتناقصة تماماً على] ∞ + ، 0]

لدينا :

$$\text{تا}(0) = 3 \text{ و } \forall س \in \mathbb{R} : \text{تا}(س) - \text{تا}(0) = 2 - س^2$$

$$\text{إذن : } \forall س \in \mathbb{R} : \text{تا}(س) \geq \text{تا}(0)$$

يسمى العدد تا(0) القيمة العظمى للدالة تا .

• دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س| .

نلاحظ ، في الجدولين التاليين

$^3 10 -$	$^2 10 -$	$10 -$	س
1997-	1997-	197-	تا (س)

$^3 10$	$^2 10$	10	س
1997-	1997-	197-	تا (س)

أن قيم (- تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما تكون قيم | س | كبيرة .

كما رأينا في الأمثلة السابقة يمكن التأكد من النتيجة التالية :

تا (س) $\leftarrow \infty -$ عندما س $\leftarrow + \infty$

تا (س) $\leftarrow \infty -$ عندما س $\leftarrow - \infty$

• جدول التغيرات :

$\infty +$	0	$\infty -$	س
	3		تا (س)

• التمثيل البياني :

المنحنى (γ) الممثل للدالة : س $\leftarrow - 2$ س $+ 3$ هو مجموعة النقط

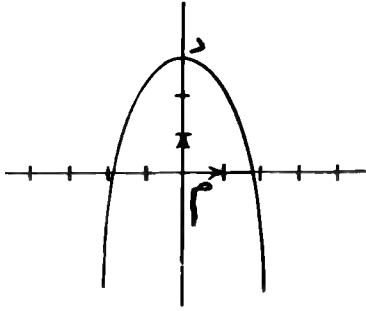
(س ، ع) من المستوي حيث س $\in \mathbb{R}$ و ع $= - 2$ س $+ 3$.

الجدول التالي يعطي إحداثيات بعض النقط من (γ)

3	2	1	0	$1 -$	$2 -$	$3 -$	س
15-	5-	1	3	$1 +$	5-	15-	تا (س)

المنحنى (γ) يسمى ، أيضاً ، قطعاً مكافئاً .

إذا رسمنا (γ) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد نحصل على منحنٍ له المظهر المبين في الشكل التالي :



محور الترتيب هو محور تناظر (γ) .

ذروة القطع المكافئ (γ)

هي النقطة د (3 . 0)

3. دراسة الدالة تا : $s \mapsto \frac{1}{2}s^2 - 2s + 1$

• مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة على \mathbb{R} .

• اتجاه التغير :

مهما يكن العددا الحقيقيان المختلفان s_1 و s_2 لدينا :

$$\frac{(1 + \frac{1}{2}s_2^2 - 2s_2) - (1 + \frac{1}{2}s_1^2 - 2s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{(\frac{1}{2}s_2^2 - 2s_2) - (\frac{1}{2}s_1^2 - 2s_1)}{s_2 - s_1}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(s_2^2 - s_1^2) - 2(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} =$$

$$\frac{[\frac{1}{2}(s_2 + s_1) - 2] (s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} =$$

$$\frac{1}{2}(s_2 + s_1) - 2 =$$

يمكن كتابة نسبة التزايد كما يلي :

$$\left[\begin{array}{c} 4 - s_2 + s_1 \\ 2 \end{array} \right] \frac{1}{2} = \frac{s_1 - (s_1)_{\text{تا}} (s_2)_{\text{تا}}}{s_1 - s_2}$$

$$\left[\begin{array}{c} (2 - s_2) + (2 - s_1) \\ 2 \end{array} \right] \frac{1}{2} =$$

إذا كان $s_1 \leq 2$ و $s_2 \leq 2$ و $s_1 \neq s_2$ فإن :

$$0 < \left[\begin{array}{c} (2 - s_2) + (2 - s_1) \\ 2 \end{array} \right] \frac{1}{2}$$

إذا كان $s_1 \geq 2$ و $s_2 \geq 2$ و $s_1 \neq s_2$ فإن :

$$0 > \left[\begin{array}{c} (2 - s_2) + (2 - s_1) \\ 2 \end{array} \right] \frac{1}{2}$$

إذن :

الدالة Δ متناقصة تماماً على $[2, x - 2]$ و متزايدة تماماً على $[x + 2, 2]$

لدينا : $\Delta(2) = 1$ و $\forall s \in \mathbb{N}$ تا $(s) \leq \Delta(2)$

$$\text{لأن : } \forall s \in \mathbb{N} \text{ تا } (s) - \Delta(2) = \frac{1}{2}(2 - s)^2$$

تا (2) هو القيمة الصغرى للدالة Δ .

• دراسة الدالة Δ من أجل القيم الكبيرة للعدد $|s|$

نلاحظ ، في الجدولين التاليين

s	10	10^2	10^3
تا (s)	31	4801	498001
s	$10 -$	$10^2 -$	$10^3 -$
تا (s)	71	5201	502001

أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما تكون قيم |س| كبيرة .
كما رأينا في الأمثلة السابقة ، يمكن التأكد من النتيجة التالية :

تا (س) $\rightarrow \infty$ عندما س $\rightarrow \infty$

تا (س) $\rightarrow \infty$ عندما س $\rightarrow -\infty$

• جدول التغيرات :

س	تا(س)
$\infty -$	$\infty +$
2	1
$\infty +$	$\infty +$

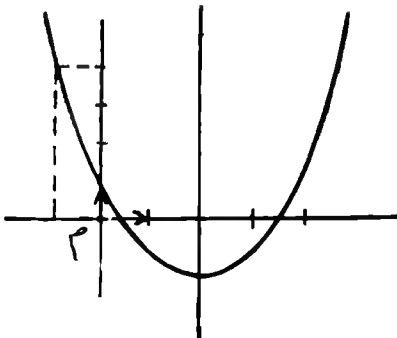
• التمثيل البياني :

المنحني (٤) للدالة س $\rightarrow \frac{1}{2} س^2 - 2س + 1$ هو مجموعة النقط

⊆ (س ، ع) من المستوي حيث س $\in \mathbb{R}$ و ع $= \frac{1}{2} س^2 - 2س + 1$.

الجدول التالي يعطي إحداثيات بعض النقط من (٤)

س	1 -	0	1	2	3	4
تا(س)	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1 -	$\frac{1}{2}$	1



المنحني (٥) يسمى ، أيضاً ،
قطعا مكافئاً .

وفي المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد (م ، و ، ح) ، المستقيم ذو

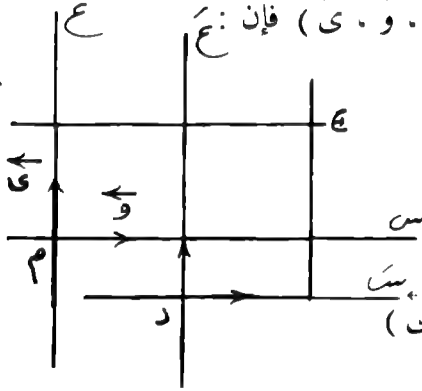
المعادلة س = 2 هو محور تناظر

للمنحني (٥) .

ولإثبات ذلك نقوم بتغيير المعلم محتفظين بالأساس (و. ي) ومتخذين النقطة د (2 - 1) مبدأً جديداً .

(كما هو مبين في جدول تغيرات الدالة تا تأخذ قيمتها الصغرى (1 -) من أجل س = 2) .

نعلم أنه إذا كان (س. ع) إحداثيي النقطة هـ في المعلم (م. و. ي) و (س'. ع') إحداثيها في المعلم (د. و. ي) فإن : ع



$$\begin{aligned} س &= س' + 2 \\ ع &= ع' + 1 \end{aligned}$$

معادلة (γ) في المعلم (م. و. ي)

$$هي \text{ ع } = \frac{1}{2} س^2 - 2 س + 1$$

ومعادلته في المعلم الجديد (د. و. ي') هي :

$$1 - ع' + \frac{1}{2} (س' + 2)^2 - 2 (س' + 2) = 0$$

$$أي : ع' = \frac{1}{2} س'^2$$

بما أن الدالة س' ← $\frac{1}{2} س'^2$ زوجية فإن محور الترتيب للمعلم الجديد هو محور

تنظر لتمثيلها البياني (γ)

معادلة هذا المحور ، في المعلم الجديد هي س' = 0

ومعادلته ، في المعلم (م. و. ي) هي س = 2 .

إذن : المستقيم ذو المعادلة س = 2 هو محور تناظر للمنحنى (γ)

4 - دراسة الدالة τ : $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n$ ($n \neq 0$) :

• مجموعة التعريف

الدالة τ معرفة على \mathbb{R} .

• اتجاه التغير :

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان τ_1 و τ_2 لدينا :

$$\tau(\tau_1) - \tau(\tau_2)$$

$$= \frac{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n) - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n)}{}$$

$$= \frac{(\tau_1 - \tau_2) + (\tau_3 - \tau_3) + \dots + (\tau_n - \tau_n)}{}$$

$$= \frac{(\tau_1 - \tau_2) + 0 + \dots + 0}{}$$

$$= \tau_1 - \tau_2$$

يمكن كتابة نسبة التزايدات هذه كما يلي :

$$\left[\frac{\tau}{1} + (\tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n) \right] \tau = \frac{\tau(\tau_1) - \tau(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2}$$

$$= \left[\left(\frac{\tau}{1} + \tau_2 \right) + \left(\frac{\tau}{1} + \tau_3 \right) + \dots + \left(\frac{\tau}{1} + \tau_n \right) \right] \tau$$

نميز حالتين : $0 < \tau$ و $0 > \tau$

الحالة الأولى $0 < \alpha$:

إذا كان $s_1 \leq \frac{\alpha}{12}$ و $s_2 \leq \frac{\alpha}{12}$ و $s_1 \neq s_2$ فإن :

$$0 < \left[\left(\frac{\alpha}{12} + s_2 \right) + \left(\frac{\alpha}{12} + s_1 \right) \right] \quad (1)$$

إذا كان $s_1 \geq \frac{\alpha}{12}$ و $s_2 \geq \frac{\alpha}{12}$ و $s_1 \neq s_2$ فإن :

$$0 > \left[\left(\frac{\alpha}{12} + s_2 \right) + \left(\frac{\alpha}{12} + s_1 \right) \right] \quad (2)$$

إذن :

الدالة α متناقصة تماماً على $\left[\frac{\alpha}{12} - \alpha, \frac{\alpha}{12} \right]$ ومتزايدة تماماً على

$$\left[\frac{\alpha}{12} + \alpha, \frac{\alpha}{12} \right]$$

الحالة الثانية $0 > \alpha$:

إذا كان $s_1 \leq \frac{\alpha}{12}$ و $s_2 \leq \frac{\alpha}{12}$ و $s_1 \neq s_2$ فإن :

$$0 > \left[\left(\frac{\alpha}{12} + s_2 \right) + \left(\frac{\alpha}{12} + s_1 \right) \right] \quad (1)$$

إذا كان $s_1 \geq \frac{\alpha}{12}$ و $s_2 \geq \frac{\alpha}{12}$ و $s_1 \neq s_2$ فإن :

$$0 < \left[\left(\frac{\alpha}{12} + s_2 \right) + \left(\frac{\alpha}{12} + s_1 \right) \right] \quad (2)$$

إذن :

$$\left[\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right] \text{ متزايدة تماماً على } \left[x + \frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{أثبتنا : } \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f = \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f + \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f$$

$$\frac{2u - 14}{14} =$$

$$\text{٧ س } \exists \text{ ح : } \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f = \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f + \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f$$

$$\frac{2u}{14} + \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f =$$

إذن :

$$\text{ـ إذا كان } 0 < f \text{ فإن : } \text{٧ س } \exists \text{ ح : } \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f \leq \left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f$$

$$\left(\frac{u}{12} - \frac{1}{2} \right) f \text{ هي القيمة الصغرى للدالة } f$$

- إذا كان $0 > 1$ فإن γ س \Rightarrow ح تا (س) \geq تا $\left(\frac{\gamma}{12} - \right)$

تا $\left(\frac{\gamma}{12} - \right)$ هي القيمة العظمى للدالة تا

• دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س|
إذا حسبنا قيم تا (س) من أجل بعض القيم الكبيرة للعدد |س| نلاحظ
أن قيم |تا (س)| تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون |س| كبيراً .
ويمكن التأكد من النتائج التالية :
- إذا كان $0 < 1$ فإن :

تا (س) $\leftarrow \infty$ عندما س $\leftarrow \infty$

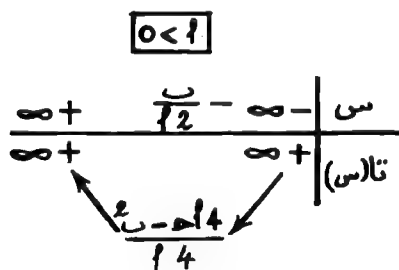
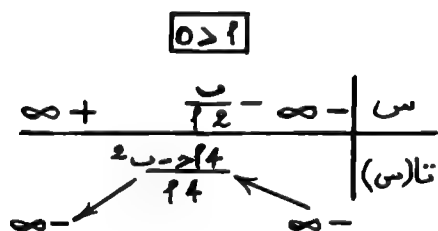
تا (س) $\leftarrow \infty$ عندما س $\leftarrow -\infty$

- إذا كان $0 > 1$ فإن :

تا (س) $\leftarrow -\infty$ عندما س $\leftarrow \infty$

تا (س) $\leftarrow -\infty$ عندما س $\leftarrow -\infty$

• جدول التغيرات :



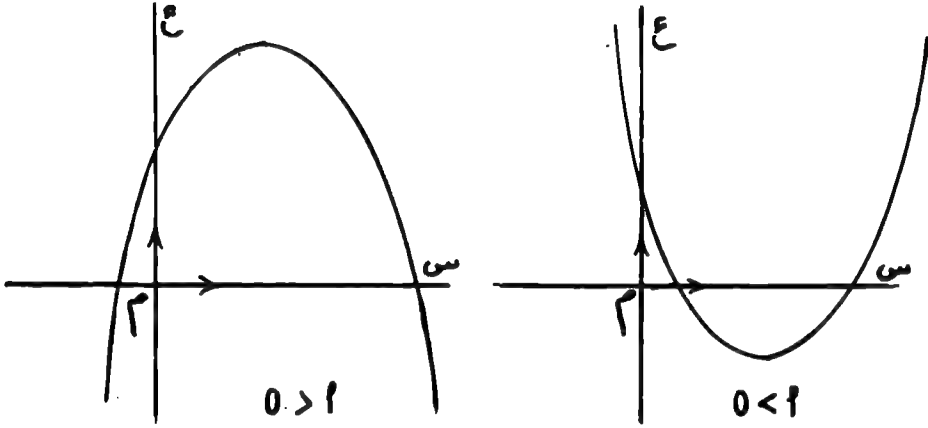
• التمثيل البياني :

التمثيل البياني (γ) للدالة س $\leftarrow 1$ س 2 + س + γ ($0 \neq 1$)
هو مجموعة النقط γ (س ، ع) من المستوي حيث :

$$س \geq ع \text{ و } ع = ١س^2 + بس + ح (١ \neq 0)$$

يسمى المنحني (٧) قطعاً مكافئاً

المنحنيان المرسومان في الشكلين التاليين هما تمثيلان لبيانين لدالتين من الشكل $س \leftarrow ١س^2 + بس + ح$ في الحالتين $0 < ١$ و $0 > ١$



وفي المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ، المستقيم الذي معادلته

$$س = -\frac{ب}{١} هو محور تناظر للمنحني (٧)$$

ويمكن التأكد من ذلك ، مثلاً بإجراء تغيير للمعلم كما رأينا في المثال السابق .

والنقطة $د \left(-\frac{ب}{١} , \frac{٤ - ب^2}{٤} \right)$ هي ذروة القطع المكافئ (٧)

1.1 - مجموعة التعريف :

فنا = \cdot = $[-\infty, 0[\cup]0, +\infty]$

$$(-)^{\infty+}, 0[\overset{!}{\omega}] 0, \infty - [)$$
$$\frac{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}}{\frac{s_2 - s_1}{s_1 s_2}} = \frac{\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}}{\frac{s_1 - s_2}{s_1 s_2}} = \frac{(s_1 - s_2) \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right)}{s_1 - s_2} = \frac{1}{s_1 s_2}$$
$$0 < \frac{(s_1) - (s_2)}{s_1 - s_2} \text{ و } 0 > \frac{(s_2) - (s_1)}{s_2 - s_1}$$

الدالة τ متناقصة تماماً على كلٍّ من المجالين $]-\infty, 0[$ و $0, +\infty[$

184

نلاحظ في الجدول التالي :

س	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\frac{1}{س}$	0,1	0,01	0,001	0,0001

أن قيم ϵ تكون قريبة من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما يكون $س$ كبيراً. هل يمكن جعل ϵ قريباً من الصفر بالقدر الذي نريده ؟ وبعبارة أخرى :

عندما يكون $س$ كبيراً ، هل يمكن جعل ϵ موجباً وأصغر من أي عدد موجب تماماً ϵ ؟

$$0 < \epsilon < \frac{1}{س} \iff 0 < \frac{1}{س} < \epsilon$$

$$0 < \frac{1}{س} < \epsilon \iff 0 < \epsilon < \frac{1}{س}$$

إذن للحصول على $0 < \epsilon < \frac{1}{س}$ يكفي أخذ $س > \frac{1}{\epsilon}$

(مثلاً لكي يكون $0 < \epsilon < \frac{1}{س}$ يكفي أخذ $س > 10$) ونعبر عن هذه الحالة بالقول :

إن ϵ يتؤول إلى الصفر عندما يتؤول $س$ إلى ما لا نهاية ونكتب : $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $س \rightarrow \infty$

ومن جهة أخرى نلاحظ في الجدول التالي

س	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$\frac{1}{س}$	0,1 -	0,01 -	0,001 -	0,0001 -	0,00001 -

أن قيم ϵ تكون كذلك قريبة من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما يكون ϵ كبيراً

وبطريقة مماثلة يمكن التأكد من النتيجة التالية

- ϵ $\rightarrow 0$ عندما $س \rightarrow +\infty$

ونقول إن ϵ $\rightarrow 0$ إلى الصفر عندما $س \rightarrow +\infty$ إلى ناقص ما لا نهاية ونكتب : $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $س \rightarrow -\infty$

4.1 - دراسة الدالة ϵ من أجل القيم القريبة من الصفر للعدد $|س|$
نلاحظ في الجدول التالي :

س	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$\frac{1}{س}$	10 -	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

أن قيم ϵ تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون $س$ قريباً من الصفر وبطريقة مماثلة كما سبق يمكن التأكد من النتيجة التاليتين :

• $\epsilon \rightarrow 0$ إلى ما لا نهاية عندما $س \rightarrow 0$ إلى الصفر بقيم موجبة ونكتب : $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $س \rightarrow 0^+$

• $\epsilon \rightarrow 0$ إلى ناقص ما لا نهاية عندما $س \rightarrow 0$ إلى الصفر بقيم سالبة

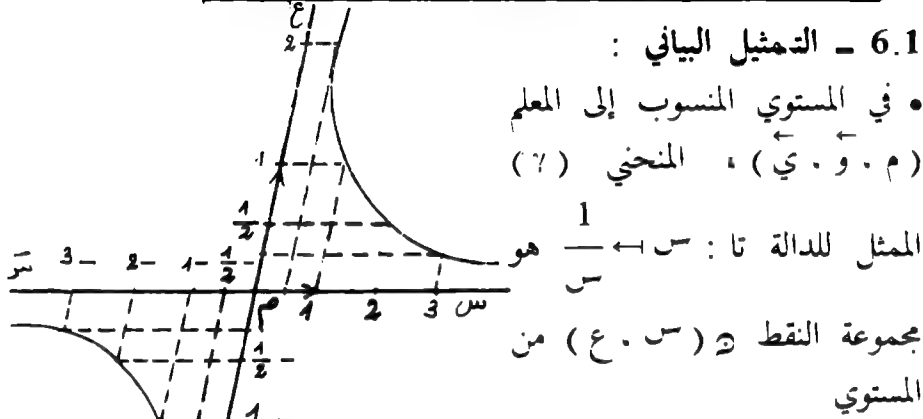
ونكتب : $\epsilon \rightarrow 0$ عندما $س \rightarrow 0^-$

5.1 - جدول التغيرات :

س	$\infty -$	0	$\infty +$
$\frac{1}{س}$	$\infty -$	0	$\infty +$

6.1 - التمثيل البياني :

• في المستوي المنسوب إلى المعلم (م. و. ي.) ، المنحني (γ)



حيث $س \in ح$ و $ع = \frac{1}{س}$

يسمى المنحني (γ) قطعاً زائداً

ويتألف هذا المنحني من فرعين منفصلين لأن العدد 0 ليست له صورة بالدالة تا

• مركز التناظر :

المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (γ) لأن الدالة تا فردية

• المستقيمات المقاربة

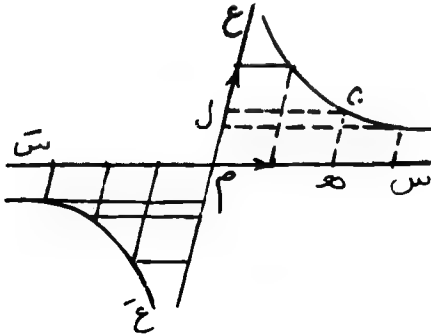
إذا كانت \in نقطة من (γ) و هـ

مستقطها على (س' س) وفق

منحى (ع' ع) و ل مستقطها

على (ع' ع) وفق منحى

(س' س)



فإن :

الطول ح ه يؤول إلى الصفر عندما يؤول الطول ه إلى ما لا نهاية لأن :

$$\text{تا (س) } \leftarrow 0 \text{ عندما س } \leftarrow +\infty$$

$$\text{تا (س) } \leftarrow 0 \text{ عندما س } \leftarrow -\infty$$

نقول إن المستقيم (س' س) مستقيم مقارب للمنحني (γ) وكذلك :

يؤول الطول م ل إلى ما لا نهاية عندما يؤول الطول ل د إلى الصفر لأن

$$\text{تا (س) } \leftarrow +\infty \text{ عندما س } \leftarrow 0^+$$

$$\text{تا (س) } \leftarrow -\infty \text{ عندما س } \leftarrow 0^-$$

نقول إن المستقيم (ع' ع) مستقيم مقارب للمنحني (γ)

$$2 - \text{دراسة الدالة تا : س} \leftarrow \frac{1}{\text{س}} \quad (0 \neq 1)$$

1.2 - مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة إذا فقط إذا كان س $\neq 0$

$$\text{فنا} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

2.2 - اتجاه التغير :

س₁ و س₂ عدنان مختلفان من نفس المجال

$$\left(]-\infty, 0[\text{ أو }]0, +\infty[\right)$$

لدينا :

$$\frac{\frac{1}{\text{س}_2} - \frac{1}{\text{س}_1}}{\frac{(\text{س}_2 - \text{س}_1)}{\text{س}_2 \text{س}_1}} = \frac{\frac{1}{\text{س}_2} - \frac{1}{\text{س}_1}}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\frac{f}{s} = \frac{s_1}{s_2}$$

بما أن s_1 و s_2 لهما نفس الإشارة فإن إشارة النسبة

$$\left(\frac{f}{s} \right) \text{ هي إشارة } (-f)$$

إذن :

• إذا كان $f < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على كل من المجالين

$$]-\infty, 0[\text{ و }]0, +\infty[$$

• إذا كان $f > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين

$$]-\infty, 0[\text{ و }]0, +\infty[$$

3.2 - دراسة الدالة f من أجل القيم الكبيرة للعدد $|s|$ ومن أجل قيم s القريبة من الصفر

بدراسة مماثلة لدراسة الدالة $s \leftarrow \frac{1}{s}$ نحصل على النتائج التالية :

$0 > f$	$0 < f$
$\frac{f}{s} \leftarrow 0$ عندما $s \leftarrow +\infty$	$\frac{f}{s} \leftarrow 0$ عندما $s \leftarrow +\infty$
$\frac{f}{s} \leftarrow 0$ عندما $s \leftarrow -\infty$	$\frac{f}{s} \leftarrow 0$ عندما $s \leftarrow -\infty$
$\frac{f}{s} \leftarrow -\infty$ عندما $s \leftarrow 0^+$	$\frac{f}{s} \leftarrow +\infty$ عندما $s \leftarrow 0^+$
$\frac{f}{s} \leftarrow +\infty$ عندما $s \leftarrow 0^-$	$\frac{f}{s} \leftarrow -\infty$ عندما $s \leftarrow 0^-$

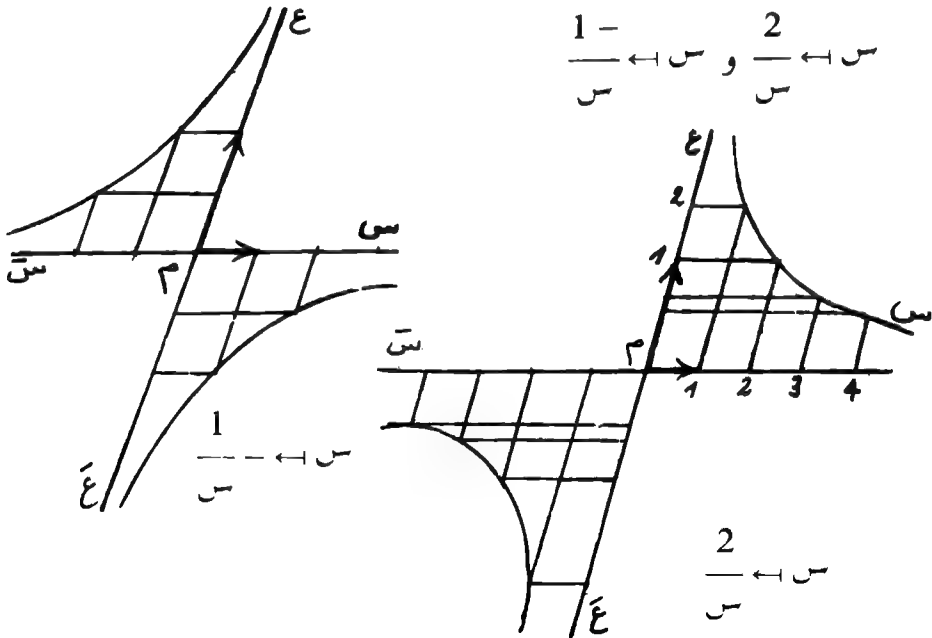
4.2 - جدول التغيرات :

$0 > f$				$0 < f$			
$\infty +$	0	$\infty -$	س	$\infty +$	0	$\infty -$	س
$0 \swarrow$	$\infty + \swarrow$	$0 \swarrow$	$\frac{f}{س}$	$0 \swarrow$	$\infty + \swarrow$	$0 \swarrow$	$\frac{f}{س}$
$\infty -$				0			

5.2 - التمثيل البياني :

مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم f فإن المنحني الممثل للدالة $س \leftarrow \frac{f}{س}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم (م . و . ي) يسمى قطعاً زائداً والمستقيمان (س' س) و (ع' ع) هما مستقيمان مقاربان لهذا القطع الزائد والمبدأ م هو مركز تناظره

يبين الشكلان التاليان المنحنيين الممثلين للدالتين



تمارين

الدوال المذكورة في ما يلي هي دوال عددية لمتغير حقيقي

عموميات :

1. عَيِّن مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

$$(1) \quad s \mapsto \frac{s+4}{s-2}$$

$$(2) \quad s \mapsto \frac{s+3}{s^2-4}$$

$$(3) \quad s \mapsto \frac{2-s-3}{2s^2+s}$$

$$(4) \quad s \mapsto \frac{(s+1)(s+5)}{s+1}$$

$$(5) \quad s \mapsto \sqrt{s-4} + \sqrt{2s-1}$$

$$(6) \quad s \mapsto \sqrt{s-2} + \sqrt{4-s}$$

$$(7) \quad s \mapsto \sqrt{s^2+2s-24}$$

$$(8) \quad s \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

$$(9) \quad s \mapsto \sqrt{\frac{s}{s+1}}$$

$$(10) \quad s \mapsto \frac{s+2}{|s|+3}$$

$$(11) \quad s \mapsto \sqrt{\frac{s}{|s|}}$$

2. عَيِّن مجموعة تعريف الدالة تا المعرفة كما يلي :

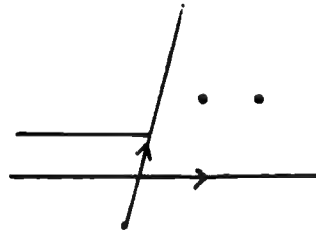
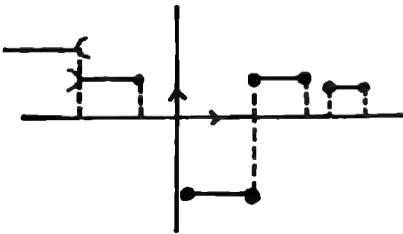
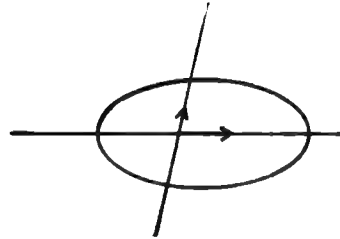
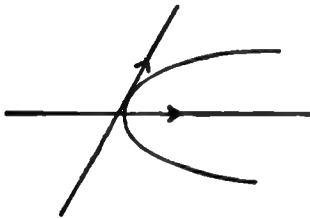
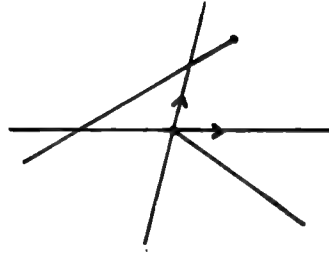
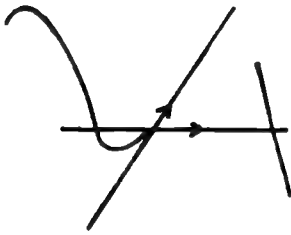
$$\begin{aligned} \text{تا } (s) &= \frac{1}{s} \quad \text{إذا كان } s \neq 0 \\ \text{و تا } (0) &= 0 \end{aligned}$$

3) عَيِّن مجموعة تعريف الدالة ها المعرفة كما يلي :

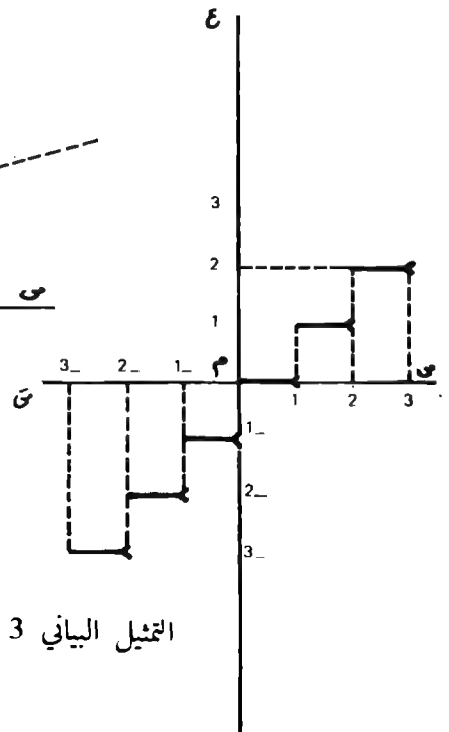
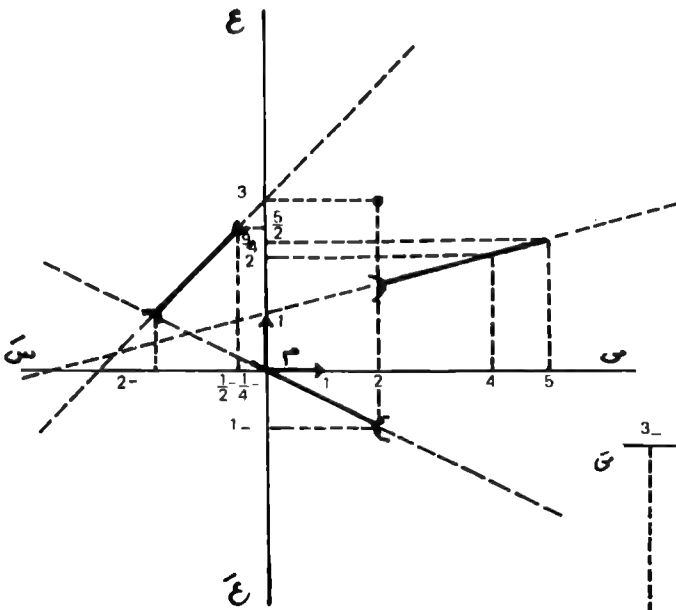
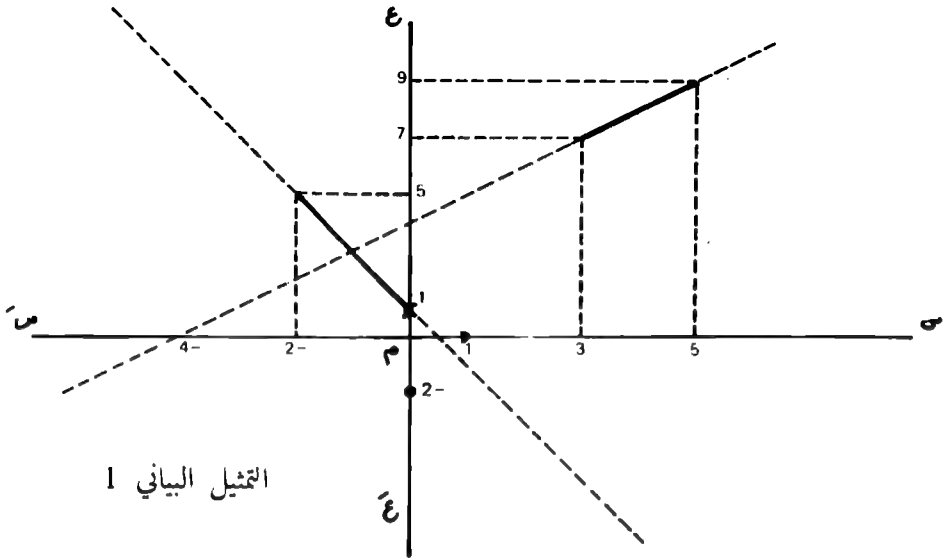
$$\text{ها (س) = } \frac{1 - \text{س}}{(2 - \text{س})(5 + \text{س})} \quad \text{إذا كان س } \in]2, \infty[$$

$$\text{و ها (س) = } \sqrt{2 - \text{س}} - 1 \quad \text{إذا كان س } \in]-\infty, 2]$$

4. هل التمثيلات التالية تمثيلات بيانية لدوال ؟



5. التمثيلات التالية بيانية لدوال يطلب تعيينها



6. يبين أن الدالة τ المعرفة كما يلي متزايدة على المجال F في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{ll} \tau(s) = 2s + 5 & F = [-3, 6] \\ \tau(s) = s^2 + 2s - 3 & F = [0, +\infty) \\ \tau(s) = \frac{1}{s} & F = [-\infty, -1] \\ \tau(s) = \frac{1}{s-2} & F = [0, 2] \\ \tau(s) = s^3 & F = [-\infty, 0] \\ \tau(s) = \sqrt{s} & F = [0, 1] \end{array}$$

7. أثبت أن الدالة τ : $s \mapsto 4s^2 + 1$ متزايدة على $[2, 5]$ ومتناقصة على $[-1, 0]$ وأنها غير رتيبة على $[-2, 3]$.

8. دالتان τ و σ معرفتان على مجال F .

ع σ دالة معرفة على F كما يلي :

$$\forall s \in F \quad \sigma(s) = \tau(s) + \sigma(s).$$

أثبت أنه :

- (1) إذا كانت τ و σ متزايدتين تماماً على F ، فإن σ متزايدة تماماً على F
- (2) إذا كانت τ و σ متناقصتين تماماً على F ، فإن σ متناقصة تماماً على F .

9. τ و σ دالتان معرفتان على مجال F حيث :

$$\forall s \in F \quad \sigma(s) < 0 \text{ و } \tau(s) < 0$$

ع σ دالة معرفة على F كما يلي :

$$\forall s \in F \quad \sigma(s) = \tau(s) \times \sigma(s).$$

أثبت أنه :

- (1) إذا كانت τ و σ متزايدتين تماماً على F ، فإن σ متزايدة تماماً على F .
- (2) إذا كانت τ و σ متناقصتين تماماً على F ، فإن σ متناقصة تماماً على F .

10. تا و ها دالتان معرفتان على مجال ف حيث :

$$\forall s \Rightarrow f \text{ تا } (s) \text{ و } ha(s) > 0 .$$

عا دالة معرفة على ف كما يلي :

$$\forall s \Rightarrow f \text{ عا } (s) = \text{تا } (s) \times ha(s) .$$

أدرس اتجاه تغير الدالة عا على ف ، في الحالتين التاليتين :

(1) تا و ها متزايدتان تماماً على ف .

(2) تا و ها متناقصتان تماماً على ف .

11. من بين الدوال التالية ، أذكر الدوال الفردية والدوال الزوجية

$$(1) s \mapsto s(5 - s^2) \quad (2) s \mapsto \frac{s}{1 + s^2} \quad (3) s \mapsto \frac{|s|}{1 + s^2}$$

$$(4) s \mapsto \frac{1 - s^3}{3 + s^2} \quad (5) s \mapsto \frac{s^2 - 3}{2 + s^3} \quad (6) s \mapsto \frac{1 - s^2}{s}$$

$$(7) s \mapsto \frac{s^3 + s}{1 + s^2 + s^4} \quad (8) s \mapsto \sqrt{4 - s^2} \quad (9) s \mapsto \sqrt{s^2 + s}$$

$$(10) s \mapsto \sqrt{\frac{1 + s}{1 - s}} \quad (11) s \mapsto \sqrt{s(1 + s)} + \sqrt{s(1 - s)}$$

$$(12) s \mapsto |s| - 2 \quad (13) s \mapsto |2 + s| \quad (14) s \mapsto \left| \frac{1 - s}{1 + s} \right|$$

$$(15) s \mapsto \frac{|s - 1| - |s + 1|}{|s - 1| + |s + 1|}$$

12. تا دالة معرفة على ح حيث :

$$\forall s \in \mathbb{C} : 3. \text{تا} (s - s) + \text{تا} (s) = 4s^3 + 2s .$$

يَبين أن الدالة تا فردية ، ثم عَيِّنها

13. تا دالة معرفة على ح . عا و ها دالتان معرفتان على ح كما يلي :

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ عا} (s) = \frac{1}{2} [\text{تا} (s) + \text{تا} (s - s)]$$

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ ها} (s) = \frac{1}{2} [\text{تا} (s) - \text{تا} (s - s)]$$

(1) أثبت أن الدالة عا زوجية وأن الدالة ها فردية

(2) بين أن : $\forall s \in \mathbb{C} \text{ تا} (s) = \text{عا} (s) + \text{ها} (s) .$

14. دالة تا معرفة على مجال ف حيث $\forall s \in \mathbb{C} \text{ ف} (s) \neq 0$ و $(s - s) \in \mathbb{F}$

ها دالة معرفة على ف كما يلي :

$$\forall s \in \mathbb{F} \text{ ها} (s) = \frac{|\text{تا} (s)|}{\text{تا} (|s|)}$$

يَبين أن الدالة ها زوجية في كل من الحالتين التاليتين :

(1) تا زوجية (2) تا فردية

15. تا دالة زوجية معرفة على ح .

أثبت أنه إذا كانت تا متزايدة تماماً على $[0, +\infty]$

فإنها متناقصة تماماً على $[-\infty, 0]$

16. تا دالة فردية معرفة على ح .

يَبين أنه إذا كانت تا متزايدة على $[0, +\infty]$ فإنها متزايدة على $[-\infty, 0]$.

الدوال التآلفية :

17. نعتبر الدالة α : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ س $\leftarrow 3$ س

(1) عيّن مجموعة الاعداد الحقيقية س بحيث يكون :
 $\alpha(10) < 10$ س

(2) عيّن مجموعة الاعداد الحقيقية س بحيث يكون :
 $\alpha(10) > 10$ س

18. نعتبر الدالة α : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ س $\leftarrow 5$ س

(1) أوجد عدداً حقيقياً α بحيث يكون :
 $\alpha < \alpha(10)$ س
 هل α وحيد ؟

(2) β عدد حقيقي موجب تماماً. عيّن عدداً حقيقياً α يحقق ما يلي :
 $\alpha < \alpha(10)$ س

19. شكل جدول التغيرات لكل دالة من الدوال التالية :
 ثم ارسم تمثيلها البياني في معلم (م ، و ، ي) .

$$(2) \text{ س } \leftarrow \frac{1}{4} + \frac{\text{س}}{2}$$

$$(1) \text{ س } \leftarrow 3 + 1$$

$$(4) \text{ س } \leftarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$(3) \text{ س } \leftarrow \frac{1}{6} - \frac{\text{س}}{3}$$

$$(6) \text{ س } \leftarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$(5) \text{ س } \leftarrow 5 - 2$$

20. المستوي منسوب إلى معلم (م ، و ، ي) .
أنشئ التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية :

- (1) $s \mapsto |s - 1|$ (2) $s \mapsto |s - 2|$
- (3) $s \mapsto |s + 2|$ (4) $s \mapsto |s + 3|$
- (5) $s \mapsto -|s + 2| + 1$ (6) $s \mapsto |s + 3| - 2$
- (7) $s \mapsto \sqrt{s^2 + (s - 1)^2}$ (8) $s \mapsto \sqrt{s^2 + (s + 1)^2} + |s - 2|$

21. المستوي منسوب إلى معلم (م ، و ، ي) .
ي (س) هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س
أنشئ التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية :

- (1) $s \mapsto [3, 3 - s]$ (2) $s \mapsto [3, 3 - s]$
- س $\mapsto [3, 3 - s]$ (س) $s \mapsto [3, 3 - s]$
- (3) $s \mapsto [3, 3 - s]$
- س $\mapsto \frac{5}{2} - s + y(s)$.

22. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .
(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ، (Δ_4) ، (Δ_5) ، (Δ_6) مستقيمات معادلاتها ،
على الترتيب :

- (1) $s = 1 + s$ (2) $s = 2 + s$
- (3) $s = 2 - s$ (4) $s = 1 + \frac{1}{2}$
- (5) $s = \frac{1}{2} + s$ (6) $s = 2 + s$

أذكر، من بين هذه المستقيمات ، المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة .
23. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

(Δ) مستقيم معادلته $2x + 5 = 0$.

عَيِّنْ ، في كل حالة من الحالات التالية ، دالة تألفية بحيث تمثلها البياني :

(1) يشمل النقطة $A(-2, 1)$ و يوازي (Δ)

(2) يشمل النقطة $B(0, -1)$ و يعامد (Δ) .

(3) يكون نظير (Δ) بالنسبة إلى محور الفواصل .

(4) يكون نظير (Δ) بالنسبة إلى محور الترتيب .

24. AB مثلث. أقياس أضلاعه ، بالاستيمترات هي :

$AB = 5$ ؛ $AC = 8$ ؛ $BC = 5$.

ارسم التمثيل البياني للدالة $s \mapsto m(s)$ حيث

$m(s)$ هو محيط المثلث ABC .

25. (Δ) مستقيم و (m ، و) معلم له .

A ، B ، و ثلاث نقط من (Δ) فواصلها $(-2, 1)$ ، $(1, 1)$ ، (s) على الترتيب .

(1) أكتب الأعداد الحقيقية $TA(s)$ ، $HA(s)$ ، $EA(s)$ ، $PA(s)$

حيث : $TA(s) = PA + AB$ ؛ $HA(s) = PA - AB$ ؛

$EA(s) = PA + AB$ ؛ $PA(s) = PA - AB$ ؛

(2) هل الدوال التالية تألفية :

$s \mapsto TA(s)$ ؛ $s \mapsto HA(s)$ ؛ $s \mapsto EA(s)$ ؛

$s \mapsto PA(s)$.

26. نعتبر الدالتين الخطيتين ، TA : $s \mapsto PA$

HA : $s \mapsto PA$

نسمي (Δ) و (Δ') التمثيلين البيانيين للدالتين TA ، HA ، على الترتيب ، في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد (m ، و، و) .

أثبت أن (Δ') يكون نظير (Δ) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل إذا فقط إذا كان

$$0 = PA + AB$$

27. المستوي منسوب إلى معلم متعامد (م، و، ي).
 (Δ) و (Δ') مستقيمان معادلتهما، على الترتيب،
 $ع = ا س + م$ و $ع = ا' س + م'$.
 كيف نختار الأعداد الحقيقية $ا، ا'، م، م'$ حتى يكون (Δ) نظير (Δ')
 بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

الدالة : $س \mapsto ا س^2 + م س + م' (ا \neq 0)$
 28. $س \mapsto ا س^2 + م س + م'$: الدالة : $س \mapsto 4 س^2 + 7 س + 5$
 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب س يكون $س < 4 س^2$
 (2) أوجد عددا حقيقيا موجبا ا بحيث :
 إذا كان س أكبر من ا فإن $س < 10^{20}$

29. $س \mapsto ا س^2 + م س + م'$: الدالة : $س \mapsto 5 س^2 - 8$
 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي س أكبر من 2 يكون $س < 5 س^2$
 (2) أوجد عددا حقيقيا موجبا ا بحيث :
 إذا كان س أصغر من $(-ا)$ فإن $س < 10^a$

30. نستوي منسوب إلى معلم (م، و، ي)
 شكل جدول تغيرات كل من الدوال التالية وأنشيء تمثيلاتها البيانية

(1) $س \mapsto ا س^2$ (2) $س \mapsto 2 س^2$
 (3) $س \mapsto \frac{1}{2} س^2$ (4) $س \mapsto \frac{1}{3} س^2$
 (5) $س \mapsto 3 س^2$ (6) $س \mapsto 2 س^2 + 3 س - 5$

31. نستوي منسوب إلى معلم (م، آ، م). نضع : $م = ا، م = ب، م = ي$
 شكل جدول تغيرات الدالة : $س \mapsto ا س^2 + ب س - 3$ ثم أنشيء تمثيلها البياني
 في كل حالة من الحالات التالية

- (1) (م، و، ي) معلم متعامد متجانس
 (2) $60^\circ = \angle \vec{m}, \vec{w} \text{ و } |\vec{y}| = |\vec{w}|$
 (3) $2 = |\vec{y}| \text{ و } (\vec{m}) \perp (\vec{m})$
 فيما يلي المستوى منسوب إلى المعلم (م، و، ي)

32. شكل جدول تغيرات كل من الدوال التالية وأنشيء تمثيلاتها البيانية

- (1) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - 2s - 4s + 1$
 (2) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - 4s - 2s + 1$
 (3) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - 2s - 2s + 2$

33. أدرس كل دالة من الدوال التالية ثم أنشيء تمثيلها البياني

- (1) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - |3 - s| + 2$
 (2) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - |s^2 + s|$
 (3) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - |s^2 - s + 1|$
 (4) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - |2 - s^2 - s + 4|$
 (5) $\vec{h} \leftarrow \vec{h}$
 $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - \sqrt{(s^2 + 2s)^2 + |s - 1|}$

34. α عدد حقيقي و (ك) المنحني الممثل للدالة : $\vec{s} \leftarrow \vec{s} - \alpha s - 1$
 عين α حتي تنتمي النقطة (1، 4) إلى المنحني (ك) ثم أنشيء (ك)

35. β, α عدنان حقيقيان و (ك) المنحني المثل للدالة :

$$s \mapsto \alpha s^2 + \beta (s^2 - 1) + 1$$

عين α و β حتي تنتمي النقطتان $f(1, 2)$ و $b(2, -1)$ إلى المنحني (ك) ثم أنشيء (ك)

36. δ, β, α أعداد حقيقية و (ك) المنحني المثل للدالة :

$$s \mapsto \alpha s^2 + \beta s + \delta$$

عين α, β, δ حتي تنتمي النقط $f(1, 2)$ ، $b(-1, 2)$ و $ج(-2, 3)$ إلى المنحني (ك) . ثم أنشيء (ك)

37. δ, β, α أعداد حقيقية و (ك) المنحني المثل للدالة :

$$s \mapsto \alpha s^2 + \beta s + \delta$$

عين α, β, δ حتي تنتمي النقط $f(-1, 6)$ ، $b(1, 4)$ و $ج(2, -3)$ إلى المنحني (ك) . ثم أنشيء (ك)

38. تا و ها دالتان معرفتان كما يلي

$$\begin{aligned} \text{تا : } s \mapsto 4s^2 - 2s \\ \text{ها : } s \mapsto 2s - 2 \end{aligned}$$

(ك) المنحني المثل للدالة تا ، (Δ) المستقيم المثل للدالة ها
عين إحداثيات نقط تقاطع (ك) و (Δ)
أنشيء (ك) و (Δ)

39. تا و ها دالتان معرفتان كما يلي :

$$\begin{aligned} \text{تا : } s \mapsto 2s^2 + 3s - 3 \\ \text{ها : } s \mapsto -2s^2 + 3s + 4 \end{aligned}$$

(ك) المنحني المثل للدالة تا ، (ل) المنحني المثل للدالة ها
1) عَيِّن إحداثيات نقط تقاطع (ك) مع الحاملين $(s' s)$ و $(ع' ع)$ للمحورين

2) عَيِّن إحداثيات نقط تقاطع (ل) مع $(s' s)$ و $(ع' ع)$

3) عَيِّن إحداثيات نقط تقاطع (ك) و (ل)

40. (ك) المنحني المثل للدالة : تا : س ← س² - 2 س - 8

- 1) أكتب كثير الحدود تا (س) على شكله النموذجي
- 2) م' نقطة إحداثياتها (1-، 9-) في المعلم (م، و، ي)
- أكتب معادلة المنحني (ك) بالنسبة إلى المعلم (م، و، ي)

41. ط عدد حقيقي و هـ الدالة :

$$س ← ط س^2 - 2 (ط + 1) س + ط + 3$$

1). عين مجموعة قيم ط بحيث تقبل المعادلة هـ (س) = 0 حلا واحدا

• عين مجموعة قيم ط بحيث يكون هـ (2) = 0 أو هـ $\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

• عين مجموعة قيم ط حتي يكون هـ (1) = 0

2) عين ، حسب قيم العدد الحقيقي ك ، مجموعة الأعداد الحقيقية ط التي من أجلها تقبل الدالة هـ قيمة صفري تساوي ك

3) • أنشيء المنحنيين الممثلين للدالتين هـ و هـ₍₁₎

• بين أن هذين المنحنيين نقطة مشتركة يطلب حساب إحداثياتها

4) أثبت أن المنحني المثل للدالة هـ يشمل نقطة إحداثياتها مستقلان عن ط

42. [م ك ، م ل] زاوية قائمة ، هـ نقطة متغيرة من [م ك] ، تختلف عن م . ا نقطة

ثابتة من [م ل] بحيث م' = 4

(وحدة الطول هي المستقيم)

الدائرة التي تشمل النقطة ا وتمس المستقيم (م ك) في النقطة هـ تقطع [م ل] في

النقطة ب .

نضع م = هـ و س = م و م = ع

1) قارن بين الزاويتين [هـ ، ا] و [ب ، م] و [م ، ع]

2) بين أن : س² = 4 ع

3) شكل جدول تغيرات الدالة : س ← ع ثم أنشيء تمثيلها البياني

$$43. (1) \text{ أنشيء القطع المكافئ (ك) الذي معادلته : } ع = \frac{س^2}{2}$$

$$(2) \text{ ط عدد حقيقي حيث } ط < -\frac{1}{2}$$

يتقاطع المنحني (ك) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته ع = س · ط في النقطتين س' و س''

أحسب بدلالة ط إحداثي النقطة ي منتصف القطعة [س' س'']

$$\text{عَيِّن مجموعة النقط ي عندما يتغير ط في المجال }]-\frac{1}{2} + \infty[$$

44. إذا سقط حجر سقوطا حرا فإنه يقطع في زمن ز مسافة قدرها 4.8 ز²

(1) ما هو الزمن الذي استغرقه هذا الحجر إذا قطع في سقوطه 176.4 م؟

(2) ما هي المسافة التي قطعها هذا الحجر إذا استغرق في سقوطه زمنا قدره 7 ثا

$$\text{الدالة : } س \mapsto \frac{1}{س} \quad (0 \neq 1)$$

$$45. \text{ ثا هي الدالة } س \mapsto \frac{5}{س^2}$$

(1) أوجد عددا حقيقيا موجبا α بحيث يكون

$$س < \alpha \iff 0 > \text{ثا}(س) > -10^{\circ}$$

(2) أوجد عددا حقيقيا موجبا β بحيث يكون

$$س > \beta \iff -10^{\circ} > \text{ثا}(س) > 0$$

$$46. \text{ ثا هي الدالة } س \mapsto -\frac{2}{س^5}$$

أوجد عددين حقيقيين موجبين α و β بحيث

$$(1) -\alpha > س > 0 \iff \text{ثا}(س) < -10^{\circ}$$

$$(2) 0 > س > \beta \iff \text{ثا}(س) > -10^{\circ}$$

47. أدرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم أنشئ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم (م . و . ي)

$$\begin{array}{lll} (1) \text{ س ← } \frac{2-}{\text{س}} & (2) \text{ س ← } \frac{1}{\text{س}} & (3) \text{ س ← } \frac{2-}{\text{س}} \\ (4) \text{ س ← } \frac{3}{\text{س}} & (5) \text{ س ← } \frac{4}{\text{س}} & (6) \text{ س ← } \frac{2.1}{\text{س}} \end{array}$$

48. أدرس و مثل بيانيا كلا من الدوال التالية

$$(1) \text{ س ← } \frac{1}{\text{س}} \quad (2) \text{ س ← } \frac{2-}{\text{س}} \quad (3) \text{ س ← } \frac{3}{\sqrt{2}\text{س}}$$

49. أنستوي منسوب إلى معلم (م . و . ي)

(Δ) و (γ) هما التمثيلان البيانيان للدالتين

$$\text{تا : س ← } \frac{2}{\text{س}} \quad \text{ها : س ← } \frac{2}{\text{س}}$$

(1) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (Δ) و (γ)

(2) أنشئ في المعلم (م . و . ي) (Δ) و (γ)

50. نفس الأسئلة إذا كان :

$$\text{تا : س ← } \frac{1-}{\text{س}} \quad \text{ها : س ← } \frac{1-}{\text{س}}$$

51. نفس الأسئلة إذا كان :

$$\text{تا : س ← } \frac{1}{\text{س}} \quad \text{ها : س ← } \frac{1}{\text{س}}$$

52. أدرس و مثل بيانيا الدالة المعركة كما يلي :

$$\text{تا (س) = } \frac{2}{\text{س}} \quad \text{إذا كان } \text{س} > 0$$

$$\text{و تا (0) = 0}$$

$$\text{و تا (س) = س + 1} \quad \text{إذا كان } \text{س} < 0$$

53. 1) أنشيء . في المستوي المنسوب إلى معلم (م ، و ، ي) المنحني (γ) المثل

$$\text{للدالة : } s \mapsto \frac{1}{2s}$$

2) ط عدد حقيقي أكبر من 1 . (و) مستقيم معادلته $E = \frac{s}{2} + ط$

عَيِّن إحداثيات نقط تقاطع (γ) و (و) .

3) نسمي f و م نقطتي تقاطع (γ) و (و)

عَيِّن إحداثيي النقطة ي منتصف [f م]

ما هي مجموعة النقط ي عندما يتغير ط في المجال $] 1 + \infty]$

54. 1) المستوي منسوب إلى معلم (م ، و ، ي)

عَيِّن العددين الحقيقيين α و β حتي تنتمي النقطتان f (- 1 ، 3)

و م $\left(\frac{1}{2} , 3 - \right)$ إلى المنحني (γ) الذي معادلته

$$E = \frac{\alpha}{s} + \beta$$

م' نقطة إحداثياها (0 ، 1) في المعلم (م ، و ، ي)

2) أكتب معادلة المنحني (γ) في المعلم (م' ، و ، ي)

3) أنشيء (α) في المعلم (م ، و ، ي)

55. 1 ، م ، ح ثلاث نقط متغيرة في المستوي بحيث تكون هذه النقط رؤوس

مثلث مساحته متر مربع

أحسب ، بالامتار ، الطول ع للضلع [f م] بدلالة الطول س للعمود

المتعلق بالضلع [f م]

أدرس الدالة $s \mapsto ع$ و أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

(م ، و ، ي)

56. (١) نصف دائرة قطرها [أ ب] حيث أ ب = 6 (يؤخذ الستيمتر وحدة لاضال)

(_١Δ) و (_٢Δ) هما المماسان للقوس (س) في النقطتين أ ، ب على الترتيب .

ه نقطة متغيرة على (س) مختلفة عن أ و ب .

المماس (Δ) للقوس (س) في النقطة ه يقطع المماسين (_١Δ) و (_٢Δ)

في النقطتين ك ، ل على الترتيب

نضع أ ك = س ، ب ل = ع

(1) بين أن : س ع = 9

(2) شكل جدول تغيرات الدالة س ← ع و أنشيء تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم (م ، و ، ي)

57. نستوي منسوب إلى معلم (م ، و ، ي) . حاملا محوريه (س ' س)

و (ع ' ع)

ط عدد حقيقي غير معدوم

س ع = 6 معادلة قطع زائد ؛ ه ، ه نقطتان متمايزتان من هذا القطع الزائد

فاصلتهما 3 ط ، $\frac{3}{2}$ على الترتيب

(1) عيّن معادلة للمستقيم (ه ه)

(2) نسمي أ و ب نقطتي تقاطع المستقيم (ه ه) مع (س ' س) و (ع ' ع)

أثبت أن للقطعتين [أ ب] و [ه ه] نفس المنتصف ي وأن النقطة ي تتغير على

مستقيم ثابت عندما يتغير ط في ح*

58. حت درجة حرارة ثابتة ، جداء الضغط ض في الحجم ح لكتلة غازية معلومة

ثابت

تملاً هذه الكتلة ، تحت درجة حرارة التجربة ، حجماً قدره 30 سم³ وتحت

ضغط 1 بار

أدرس الدالة ح ← ض و أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

(م ، و ، ي)

الباب التاسع

الهندسة الفضائية

31 . المستويات والمستقيمت في الفضاء

32 . التوازي في الفضاء

33 . التعامد في الفضاء

تعالج في هذا الباب المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية (المستويات ، المستقيمت ، وأوضاعها النسبية ، التوازي والتعامد في الفضاء)

تقدم هذه المفاهيم بطريقة بسيطة وبالاعتماد على رسومات وتمارين متنوعة تسمح للتلميذ تصور الأشكال في الفضاء .

1. الفضاء ، المستوي ، المستقيم

1.1 - الفضاء :

رأينا في السنوات السابقة كيف تمثل بعض الأجسام بالورق المقوى :
 المكعب ، الهرم ، متوازي المستطيلات ... هذه الأجسام أجزاء من
 الفضاء ، وكل نقطة من هذه الأجسام هي نقطة من الفضاء .
 الفضاء هو مجموعة غير منتهية من النقاط

2.1 - المستويات :

• طبقة ماء في حالة السكون تعطينا فكرة عن المستوي

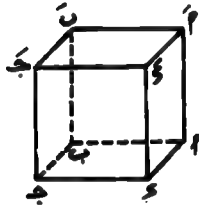
• يمثل كل وجه من أوجه مكعب

جزءاً من مستو مثلاً ، الوجه

1'1'2'2' في الشكل المجاور يمثل

جزءاً من المستوي الذي يشمل

النقط 1 ، 1' ، 2' ، 2



الشكل 1

المستوي مجموعة غير منتهية من النقاط وهو جزء من الفضاء يختلف عنه .

• يُمثّل كل مستو (ط) بمتوازي أضلاع (الشكل 2)

• يُحدّد كل مستو (ط) جزئين

منفصلين (ف₁) و (ف₂) من

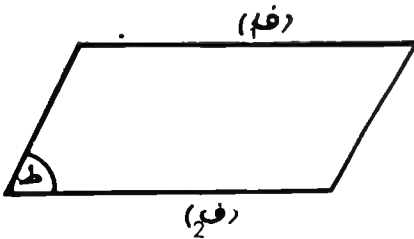
الفضاء حدّهما المستوي (ط)

نسَمي كلا من (ف₁) و

(ف₂) نصف فضاء مفتوحاً

ويسمى كل من (ف₁) ∪ (ط) و

و (ف₂) ∪ (ط) نصف فضاء مغلقاً



الشكل 2

3.1 - المستويات والمستقيمات في الفضاء .

للمستويات والمستقيمات في الفضاء الخواص التالية:

(1) إذا كانت α ، β نقطتين مختلفتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل



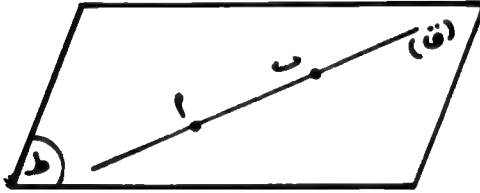
النقطتين α ، β

(2) إذا كانت α ، β ، γ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإنه

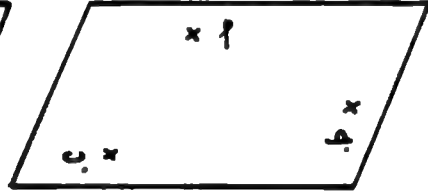
يوجد مستو وحيد يشمل النقط α ، β ، γ (الشكل 3)

(3) إذا كان لمستو (ط) ولـمستقيم (و) نقطتان مشتركتان مختلفتان فإن

(ط) يحتوي على (و) . (الشكل 4)



(الشكل 4)



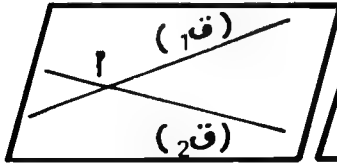
(الشكل 3)

4.1 - تعيين المستوي .

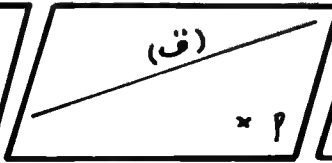
من الخواص السابقة نستنتج ما يلي :

يكون مستو معيناً بإعطاء :

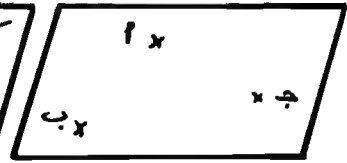
- ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة (الشكل 5)
- مستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم (الشكل 6)
- مستقيمين متقاطعين (الشكل 7)



(الشكل 7)



(الشكل 6)



(الشكل 5)

2 - الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو .

(و) مستقيم و (ط) مستو .

لدينا ثلاث حالات ممكنة

1) (و) و (ط) لهما نقطتان مشتركتان . في هذه الحالة نقول إن (و) (و)

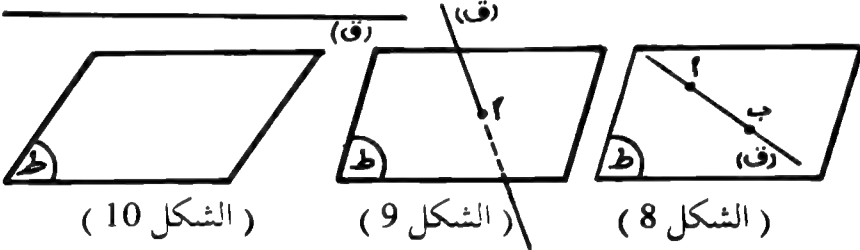
محتو في (ط) . (الشكل 8)

2) (و) و (ط) لهما نقطة مشتركة واحدة . في هذه الحالة نقول إن

(و) يقطع (ط) . (الشكل 9)

3) (و) و (ط) ليست لهما أية نقطة مشتركة .

في هذه الحالة نقول إن (و) و (ط) متوازيان تماماً (الشكل 10)



3 - الأوضاع النسبية لمستقيمين

(و₁) و (و₂) مستقيمان في الفضاء .

لدينا الحالات التالية

1) (و₁) و (و₂) لهما نقطتان مشتركتان متمايزتان :

فهما متطابقان

2) (و₁) و (و₂) لهما نقطة مشتركة واحدة : فهما متقاطعان

3) (و₁) و (و₂) ليست لهما أية نقطة مشتركة :

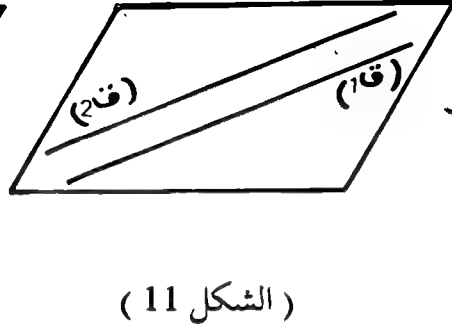
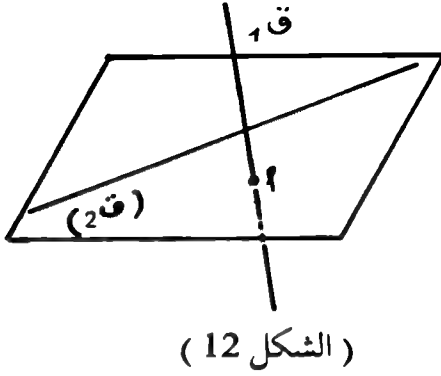
لتكن ℓ نقطة من (و₁)

النقطة ℓ والمستقيم (و₂) يعبّنان مستويًا (ط)

• إذا كان (و₁) \supset (ط) نقول إن (و₁) و (و₂) متوازيان تماماً

(الشكل 11)

- إذا كان $(ق_1)$ يقطع $(ط)$ نقول إن $(ق_1)$ و $(ق_2)$ ليسا في مستو واحد (الشكل 12)



خلاصة ما سبق :

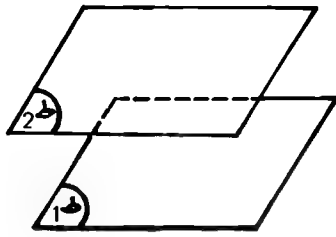
- إذا كان $(ق_1)$ و $(ق_2)$ مستقيمين في الفضاء فإنهما
- إما متطابقان
- وإما متقاطعان
- وإما متوازيان تماما
- وإما ليسا في مستو واحد

4 - الأوضاع النسبية لمستويين

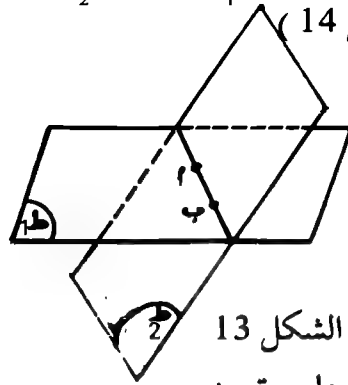
$(ط_1)$ و $(ط_2)$ مستويان

- إذا كانت للمستويين $(ط_1)$ و $(ط_2)$ ثلاث نقط مشتركة ليست على استقامة واحدة فإن المستويين $(ط_1)$ و $(ط_2)$ متطابقان
- إذا كان $(ط_1)$ و $(ط_2)$ متمايزين وكانت لهما نقطتان مشتركتان متمايزتان $أ$ و $ب$ فإن تقاطعهما هو المستقيم $(أب)$
- نقول إن $(ط_1)$ و $(ط_2)$ متقاطعان (الشكل 13)
- إذا كان المستويان $(ط_1)$ و $(ط_2)$ متمايزين وكانت لهما نقطة مشتركة $أ$ فإن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة $أ$ ونقول أيضا إنها متقاطعان .

- إذا كان (π_1) و (π_2) منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما (الشكل 14)



(الشكل 14)



(الشكل 13)

خلاصة ما سبق :

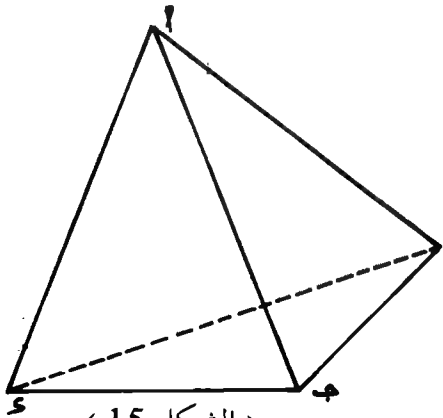
- إذا كان (π_1) و (π_2) مستويين فإنهما

 - إما متطابقان
 - وإما متقاطعان
 - وإما متوازيان تماما

5 - رباعي الوجوه :

أ، ب، ح، د أربع نقط ليست في مستو واحد
تعيّن هذه النقط أربعة مستويات : (أب ح) ، (أب د) ،
(أب د) ، (ب ح د) وتحدّد هذه المستويات الأربعة ، جسما يسمى

رباعي وجوه (الشكل 15)



(الشكل 15)

النقط أ، ب، ح، د هي رؤوسه
القطع [أب] ، [أح] ،
[ب ح] ، [أد] ، [أب د] ،
[ب ح د] هي أحرفه
أجزاء المستويات المحددة بالمثلثات
أب ح ، أب د ، ب ح د ،
ب ح د هي وجوه رباعي الوجوه

تمرين محلول :

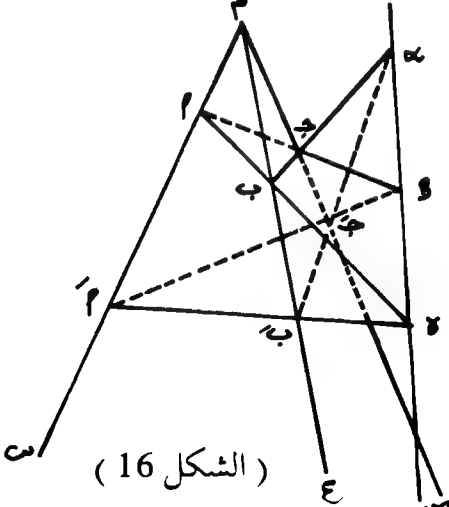
(م س) ، (م ع) ، (م ص) أنصاف مستقيمت ليست في مستو واحد. α و β نقطتان متمايزتان من [م س)
 β و β' نقطتان متمايزتان من [م ع) ، γ و γ' نقطتان متمايزتان من [م ص)

(1) بين أن المستقيمتين (أ ب) و (أ' ب') متقاطعان أو متوازيان
 (2) نفرض أن المستقيمتين (أ ب) ، (أ' ب') ، (ب' ج') تقطع المستقيمتين (أ' ب') ، (أ' ج') ، (أ' د') في النقط α ، β ، δ على الترتيب

- أثبت أن النقط α ، β ، γ تعين مستويا وأن النقط α' ، β' ، γ' تعين مستويا وأن هذين المستويين مختلفان
- أثبت أن النقط الثلاث α ، β ، γ على استقامة واحدة

الحل :

(1) المستقيمتان المتقاطعان (م س) ، (م ع) يعينان مستويا. المستقيمتان (أ ب) و (أ' ب') محتويان في هذا المستوي. فهما ، إذاً



إما متقاطعان وإما متوازيان
 (2) النقط α ، β ، γ ليست على استقامة واحدة لأنه لو كانت γ نقطة من (أ ب) لكانت γ نقطة من المستوي (م ب أ) وبالتالي تكون المستقيمتين (م أ) ، (م ب) ، (م ع) في مستو واحد وهذا يناقض الفرض

وبنفس الطريقة يمكن الإثبات على أن α' ، β' ، γ' ليست على استقامة واحدة

إذن :

- α' ، β' ، γ' تعين مستويا و α' ، β' ، γ' تعين مستويا آخر المستقيم (م α') يقطع المستوي (أ ب γ') في النقطة α' .
بما أن α' و β' مختلفتان فالنقطة α' لا تنتمي إلى المستوي (أ ب γ')
إذن المستويان (أ ب γ') و (أ' ب' γ') مختلفان .
- النقطة α تنتمي إلى المستقيمين (ب γ') و (ب' γ') فهي نقطة مشتركة للمستويين (أ ب γ') و (أ' ب' γ')
كذلك النقطتان β و δ مشتركتان لهذين المستويين .
المستويان (أ ب γ') و (أ' ب' γ') مختلفان ولهما نقطة مشتركة فهما متقاطعان وتقاطعهما مستقيم يشمل النقط α ، β ، δ
إذن : α ، β ، δ على استقامة واحدة .

1 - المستقيمات المتوازية

1.1 - تعريف

٠ يتوازي مستقيمان في الفضاء إذا وفقط إذا كانا متطابقين أو كانا في مستوي واحد ومنفصلين

- إذا توازي مستقيمان وكانا منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما
- في الهندسة المستوية إذا كان مستقيمان منفصلين فإنهما متوازيان ، بينما في الهندسة الفضائية هذا غير صحيح إذ يمكن أن يكون مستقيمان منفصلين دون أن يكونا متوازيين
- مستقيمان متوازيان تماما يعيّنان مستويا .

2.1 - نظرية 1

إذا كان (ق) مستقيما وكانت l نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل l ويوازي (ق)

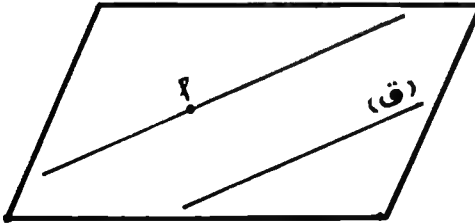
البرهان

بالفعل



(الشكل 17)

- إذا كانت $l \in (ق)$ فإن (ق) هو المستقيم الوحيد الذي يشمل l ويوازي (ق) .



(الشكل 18)

- إذا كانت $l \notin (ق)$ فإن (ق) و l يعيّنان مستويا (ط) ونعلم أنه يوجد في (ط) مستقيم وحيد يشمل l ويوازي (ق) .

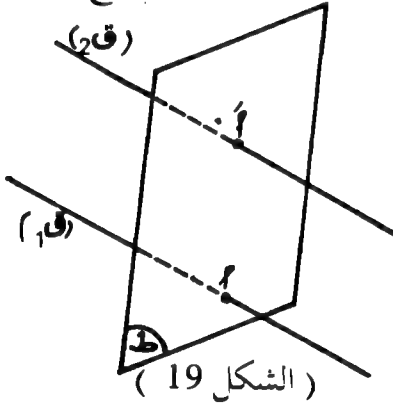
3.1 - نظرية 2

إذا كان (π_1) و (π_2) مستقيمين متوازيين وكان (π) مستويا يقطع (π_1) فإن (π) يقطع أيضا (π_2)

البرهان :

(π_1) و (π_2) مستقيمان متوازيان و (π) مستو حيث $\{I\} = (\pi_1) \cap (\pi)$

• إذا كان (π_1) و (π_2) متطابقين فإنه من الواضح أن



$$\{I'\} = (\pi_2) \cap (\pi)$$

• إذا كان (π_1) و (π_2)

متوازيين تماما فإنهما يعيّنان

مستويا (π') يختلف عن

المستوي (π)

بما أن (π) و (π') لهما نقطة

مشتركة I' فهما متقاطعان وتقاطعهما

هو مستقيم (Δ) يقطع (π_2) في النقطة I' لأن (Δ) يقطع

(π_1) و $(\pi_2) \parallel (\pi_1)$ والنقطة I' مشتركة بين المستقيم

(π_2) والمستوي (π) .

إذن المستوي (π) يقطع المستقيم (π_2) في النقطة I'

4.1 - نظرية 3

(π_1) ، (π_2) و (π_3) ثلاثة مستقيمت في الفضاء .
إذا كان (π_1) يوازي (π_2) وكان (π_2) يوازي (π_3) فإن (π_1) يوازي (π_3) .

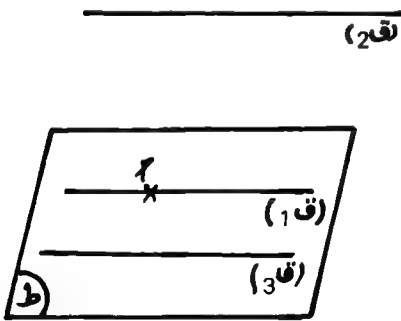
البرهان :

(ق₁) ، (ق₂) و (ق₃) ثلاثة مستقييات في الفضاء
حيث (ق₁) // (ق₂) و (ق₂) // (ق₃)
لندرس وضعية (ق₃) بالنسبة إلى (ق₁) .
لدينا حالتان ممكنتان : [(ق₁) و (ق₃) منفصلان] و [(ق₁)
(ق₃) غير منفصلين] .

الحالة الأولى : (ق₁) و (ق₃) غير منفصلين
لتكن ℓ نقطة مشتركة بين المستقيمين (ق₁) و (ق₃)
نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل ℓ ويوازي (ق₂) .
بما أن المستقيمين (ق₁) و (ق₃) يشملان النقطة ℓ ويوازيان (ق₂) فهي
متطابقان .

الحالة الثانية : (ق₁) و (ق₂) منفصلان .
لتكن ℓ نقطة من (ق₁) و (ط) المستوي المعين بالمستقيم (ق₃) وبالنقطة
 ℓ

حسب النظرية السابقة لو كان



(ط) يقطع (ق₁) لكان يقطع
(ق₂) وبالتالي يقطع (ق₃) وهذا
يناقض الفرض : (ق₃) \cap (ط) = \emptyset
إذن (ق₁) محتوي في (ط)
بما أن المستقيمين (ق₁) و (ق₃)
منفصلان ومن نفس المستوي
(ط) فهي متوازيان تماما .

(الشكل 20)

2 - المستويات والمستقيمات المتوازية

1.2 - تعريف :

يكون مستقيم (ق) ومستو (ط) متوازيين إذا فقط إذا كان (ط) و (ق) منفصلين أو كان (ق) محتويا في (ط) .

إذا كان المستقيم (ق) والمستوي (ط) منفصلين نقول إنها متوازيان تماما

2.2 - شرط توازي مستقيم ومستوي :

يكون مستقيم (ق) موازيا لمستو (ط) إذا فقط إذا كان (ق) موازيا لمستقيم من المستوي (ط)

البرهان :

- إذا كان (ق) \parallel (ط) فإن النظرية واضحة
- نفرض فيما يلي أن (ق) غير محتو في (ط)

1) نفرض أن (ق) يوازي (ط)

ونبرهن أنه يوجد في المستوي

(ط) مستقيم يوازي (ق) .

لتكن α نقطة من (ط) . (ق)

و α يعينان مستويا (ط') يختلف

عن (ط) وتقاطع (ط) و

(ط') هو مستقيم (Δ) .

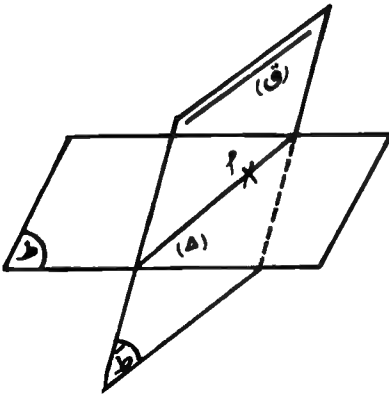
(ق) و (Δ) من نفس المستوي

(ط') وهما منفصلان لأن

(ق) و (ط) متوازيان تماما

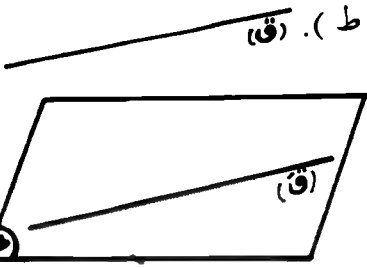
وبالتالي (ق) و (Δ) متوازيان

تماما .



(الشكل 21)

2) نفرض أنه يوجد في المستوي (ط) مستقيم (ق) يوازي المستقيم



(الشكل 22)

(ق) ونبرهن أن (ق) يوازي (ط). (ق)

لو كان (ط) يقطع (ق) لكان

أيضا يقطع (ق)

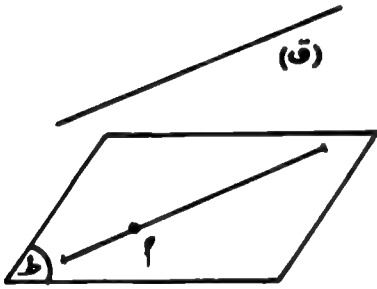
[لأن (ق) // (ق)] وهذا

يناقض الفرض (ق) \Rightarrow (ط)

إذن (ق) و (ط) متوازيان

3.2 - نتائج :

انطلاقا من النظرية السابقة يمكن التأكد من التيجتين التاليتين



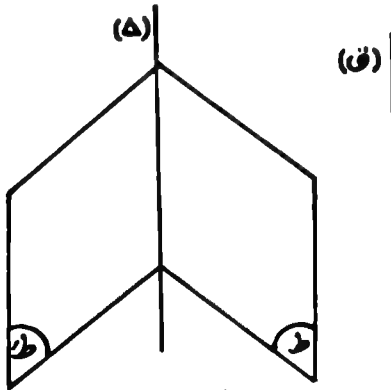
(الشكل 23)

1. إذا كان مستقيم (ق) يوازي

مستويا (ط) وكانت نقطة من

(ط) فإن المستقيم الذي يوازي

(ق) ويشمل نقطة في (ط).



(الشكل 24)

2. إذا كان مستقيم يوازي مستويين

متقاطعين فإنه يوازي مستقيم

تقاطعهما

3 - المستويات المتوازية

1.3 - تعريف :

مستويان متوازيان هما مستويان متطابقان أو منفصلان

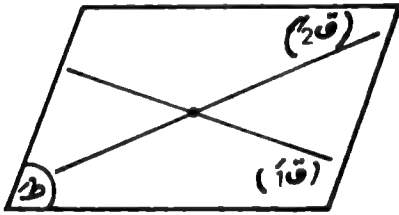
2.3 - شرط توازي مستويين :

يتوازي مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين وموازيين للمستوي الآخر

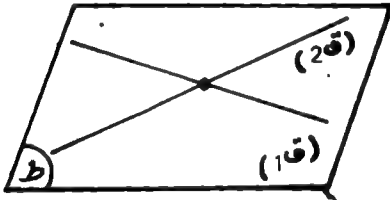
البرهان :

- إذا كان المستويان متطابقين فإن النظرية واضحة .
 - نفرض فيما يلي أن المستويين (ط) و (ط') مختلفان .
- 1) إذا كان (ط) و (ط') متوازيين فإن كل مستقيم من (ط) يوازي (ط') .

إذن (ط) يحتوي ، على الأقل ، على مستقيمين متقاطعين يوازيان (ط') .



2) نفرض أن (ط) يحتوي على مستقيمين (ق1) و (ق2) متقاطعين موازيين للمستوي (ط') ونبرهن أن (ط) و (ط') متوازيان .



لو كان (ط) و (ط') متقاطعين لكان تقاطعهما مستقيماً (Δ) .

من (ق1) // (ط) ومن (ق1) // (ط') (الشكل 25)
نستنتج أن (ق1) // (Δ)

كذلك ، من (ق2) // (ط) و من (ق2) // (ط')

نستنتج أن (ق2) // (Δ) ويكون ،

عندئذ ، (ق1) // (ق2) وهذا يناقض

الفرض : (ق1) و (ق2) متقاطعان .

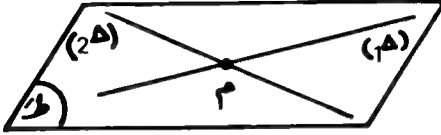
إذن (ط) و (ط') متوازيان .

3.3 - نظرية :

إذا كان (ط) مستويا وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستوي وحيد (ط') يوازي (ط) ويشمل م

البرهان :

• وجود (ط') :



ليكن $(ق_1)$ و $(ق_2)$ مستقيمين متقاطعين من المستوي (ط).



المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) اللذان يشملان النقطة م ويوازيان $(ق_1)$ و $(ق_2)$ متقاطعان فهما يعينان مستويا (ط') يوازي (ط)

(الشكل 26)

• وحدانية (ط') :

نفرض أنه يوجد مستوي (ط') يختلف عن (ط') ويشمل م ويوازي (ط).

المستويان (ط') و (ط') متقاطعان وتقاطعهما مستقيم (Δ) المستقيمان المتقاطعان $(ق_1)$ و $(ق_2)$ من (ط) يوازيان (Δ) لأن كلاً منهما يوازي (ط') و (ط') وهذا تناقض لأنه لا يوجد مستقيم يوازي مستقيمين متقاطعين

إذن (ط') و (ط') متطابقان وبالتالي (ط') وحيد

4.3 - نظرية :

(ط₁) ، (ط₂) ، (ط₃) ثلاثة مستويات
إذا كان (ط₁) يوازي (ط₂) وكان (ط₂) يوازي (ط₃)
فإن (ط₁) يوازي (ط₃)

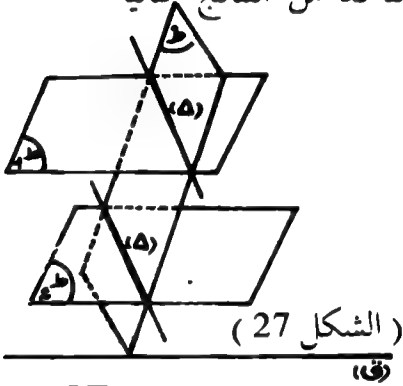
البرهان :

نفرض أن $(ط_1)$ و $(ط_3)$ متقاطعان ولتكن $ا$ نقطة مشتركة بينهما .
المستويان $(ط_1)$ و $(ط_3)$ مختلفان ويشملان النقطة $ا$ ويوازيان المستوي
 $(ط_2)$

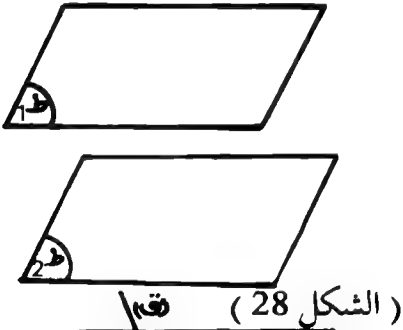
وهذا تناقض مع النظرية السابقة إذن $(ط_1)$ و $(ط_3)$ متوازيان

5.3 - نتائج :

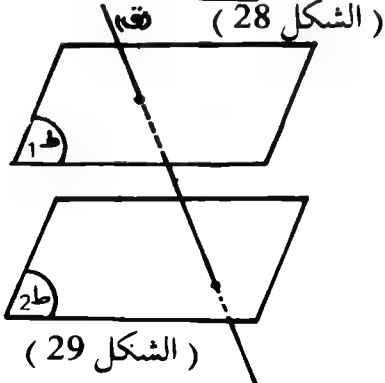
انطلاقاً من النظريات السابقة يمكن التأكد من النتائج التالية



1. إذا كان $(ط_1)$ و $(ط_2)$ مستويين متوازيين وكان $(ط)$ مستويًا يقطع $(ط_1)$ فإن $(ط)$ يقطع $(ط_2)$.
مستقيماً تقاطعها متوازيان .



2. إذا كان $(ط_1)$ و $(ط_2)$ مستويين متوازيين وكان $(ق)$ مستقيماً يوازي $(ط_1)$ فإن $(ق)$ يوازي $(ط_2)$



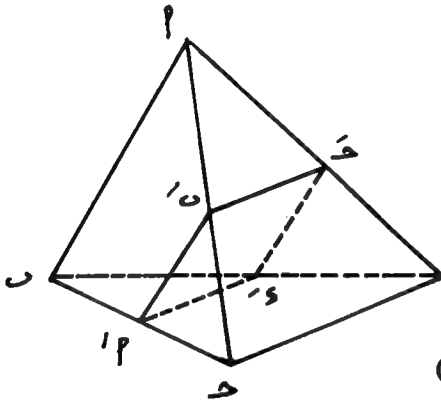
3. إذا كان $(ط_1)$ و $(ط_2)$ مستويين متوازيين وكان $(ق)$ مستقيماً يقطع $(ط_1)$ فإن $(ق)$ يقطع $(ط_2)$.

تمرين محلول :

- أب ح د رباعي وجوه ، أ' ب' ح' د' منتصفات القطع [ب ح] ،
 [ح د] و [د أ] على الترتيب
 (1) أثبت أن المستوي المعين بالنقط أ' ، ب' ، ح' يوازي المستقيمين
 (أ ب) و (ح د)
 (2) أثبت أن المستوي (أ' ب' ح') يقطع الحرف [ب د] في نقطة (د')
 وأن الرباعي أ' ب' ح' د' متوازي أضلاع

الحل :

- (1) في المثلث أ ب ح لدينا أ' منتصف [ب ح] و ب' منتصف [ح د] .
 [أ ب'] //



- نعلم في هذه الحالة أن
 (أ' ب') // (أ ب)
 إذن (أ ب) يوازي المستوي
 (أ' ب' ح')
 لأنه يوازي المستقيم (أ' ب')
 من هذا المستوي
 كذلك لدينا (ب' ح') // (ح د)
 إذن (ح د) يوازي المستوي
 (أ' ب' ح')

(الشكل 30)

- (2) لنبرهن أن المستوي (أ' ب' ح') يقطع المستقيم (ب د) .
 لو كان (ب د) يوازي (أ' ب' ح') لكان المستويان (أ ب د) و
 (أ' ب' ح') متوازيين لأن (أ ب) يوازي (أ' ب')

ومن (ح د) يوازي (أ' ب' ح') نستنتج أن (ح د) يوازي (أ ب د)
وهذا يعني أن أ، ب، ح، د تنتمي إلى مستو واحد وهذا تناقض.
إذن (أ' ب' ح') يقطع (ب د) في نقطة د'.
لنبرهن أن د' هي منتصف [ب د].
المستويات (أ' ب' ح') و (ب ح د) متقاطعان وتقاطعها هو المستقيم
(أ' د')
المستقيم (ح د) يوازي كلا من المستويين (أ' ب' ح') و (ب ح د)
فهو إذا يوازي تقاطعها (أ' د')
في المثلث ب ح د لدينا : أ' منتصف [ب ح] و (أ' د') // (ح د)
وهذا يعني أن د' هي منتصف [ب د]
بما أن ح' منتصف [أ د] و د' منتصف [ب د] فإن
(ح' د') // (أ ب).
ومن جهة أخرى لدينا :
(أ' ب') // (أ ب) و (ب' ح') // (ح د) و (أ' د') // (ح د)
ومنه : (أ' ب') // (ح' د') و (أ' د') // (ب' ح')
إذن أ' ب' ح' د' متوازي أضلاع .

1 - المستقيمت المتعامدة في الفضاء

1.1 - تعريف :

(q_1) و (q_2) مستقيمان في الفضاء و م نقطة من الفضاء .
نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (Δ_1) يوازي (q_1) ويشمل م .
كذلك يوجد مستقيم وحيد (Δ_2) يوازي (q_2) ويشمل م .
عندما يكون المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدين نقول إن (q_1) و (q_2) متعامدان في الفضاء .

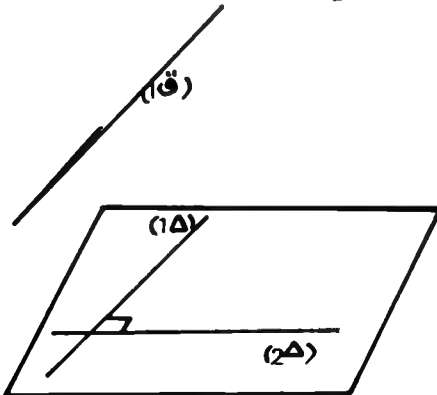
التعريف :

يتعامد ، في الفضاء ، مستقيمان (q_1) و (q_2) إذا فقط إذا كانا موازيين لمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعين ومتعامدين

الترميز : إذا تعامد مستقيمان (q_1) و (q_2) في الفضاء
نكتب : (q_1) \perp (q_2)

ملاحظة :

في الهندسة الفضائية يمكن
لمستقيمين أن يكونا متعامدين دون
أن يكونا متقاطعين بينما في الهندسة
المستوية إذا تعامد مستقيمان فإنهما
يتقاطعان .



(ق2)

(الشكل 31)

2.1 - نتائج :

يمكن التأكد من التيجتين التاليتين

- (1) (φ_1) و (φ_2) مستقيمان متعامدان في الفضاء .
 مهما كانت النقطة م من الفضاء فإن المستقيمين اللذين يشملان م
 ويوازيان (φ_1) و (φ_2) متعامدان
- (2) (φ_1) ؛ (φ_2) و (Δ) ثلاثة مستقيبات في الفضاء .
 إذا كان $(\varphi_1) // (\varphi_2)$ وكان $(\Delta) \perp (\varphi_1)$ فإن $(\Delta) \perp (\varphi_2)$

2 - المستقيبات والمستويات المتعامدة

1.2 - نظرية وتعريف :

- (Δ) مستقيم و م نقطة من (Δ)
 يوجد في كل مستوي يحتوي على (Δ) مستقيم وحيد يعامد (Δ) في م
 ليكن (φ_1) و (φ_2) مستقيمين متقاطعين في م ويعامدان (Δ)
 يعين هذان المستقيمان مستويا (τ)
 لنبرهن أن (Δ) يعامد كل مستقيم من (τ)
 ليكن (φ) مستقيما من (τ)
 لدينا حالتان : (φ) يشمل م ، (φ) لا يشمل م

• الحالة الأولى : (φ) يشمل م :

لنكن α و α' نقطتين مختلفتين من (Δ) ومتناظرتين بالنسبة إلى م وليكن
 (φ') مستقيما من (τ) يقطع المستقيبات (φ_1) ، (φ_2) و (φ) في
 النقط ب ، ج ، د على الترتيب
 لدينا :

$$\alpha' = \beta \quad \left(\text{لأن } (\varphi_1) \text{ محور } [\alpha\alpha'] \text{ في المستوي } (\alpha\beta\alpha') \right)$$

$$\alpha' = \gamma \quad \left(\text{لأن } (\varphi_2) \text{ محور } [\alpha\alpha'] \text{ في المستوي } (\alpha\gamma\alpha') \right)$$

المثلثان $أ ب ح$ و $أ' ب' ح'$ متقايسان

وبالتالي :

$$\widehat{أ ب ح} = \widehat{أ' ب' ح'}$$

$$\text{أي } \widehat{أ ب ح} = \widehat{أ' ب' ح'}$$

$$\text{من } \widehat{أ ب ح} = \widehat{أ' ب' ح'}$$

$$\text{و } أ ب = أ' ب'$$

نستنتج أن المثلثين $أ ب ح$ و $أ' ب' ح'$ متقايسان وبالتالي $أ ب = أ' ب'$.

المثلث $أ ب ح'$ متساوي الساقين

والمستقيم $(م ح)$ هو متوسطه

المتعلق بال قاعدة $[أ ب]$ فهو إذاً عمودي على $(أ ب')$ (الشكل 32)

إذن (Δ) يعامد $(ق)$

• الحالة الثانية : $(ق)$ لا يشمل $م$

يوجد في المستوي $(ط)$ مستقيم $(ق')$ يشمل $م$ ويوازي $(ق)$.

حسب الحالة السابقة (Δ) يعامد $(ق')$

وبما أن $(ق)$ يوازي $(ق')$ فإن (Δ) يعامد $(ق)$

ومنه النظرية والتعريف التاليين

نظرية :

إذا كان مستقيم (Δ) عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو

$(ط)$ فإن (Δ) عمودي على كل المستقيمتين من $(ط)$

تعريف :

نقول إن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي $(ط)$ إذا فقط إذا

كان (Δ) عموديا على كل المستقيمتين من $(ط)$

إذا كان (Δ) عموديا على $(ط)$ نقول أيضا إن $(ط)$ عمودي على (Δ)

2.2 - شرط تعامد مستقيم ومستو :
من النظرية والتعريف السابقين نستنتج النظرية التالية

نظرية :

يكون مستقيم (Δ) عموديا على مستو (ط) إذا وفقط إذا كان
 (Δ) عموديا على مستقيمين متقاطعين من (ط)

3.2 - نظريات :

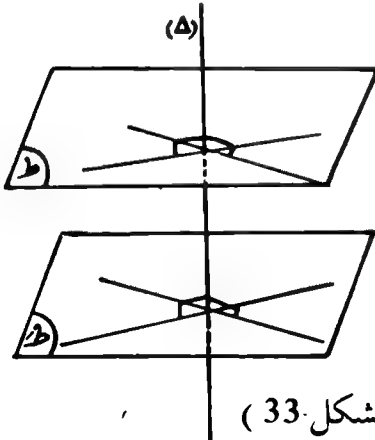
يمكن التأكد من النظريتين التاليتين (انظر إلى التمرين رقم 38 والتمرين رقم
39)

نظرية 1 :

إذا كان (Δ) مستقيما وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستو
وحيد يعامد (Δ) ويشمل م

نظرية 2 :

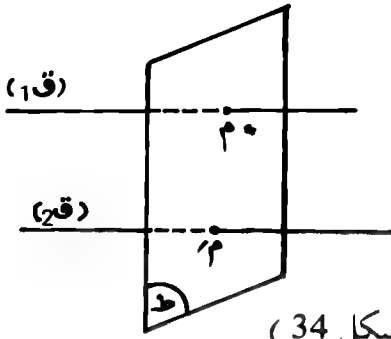
إذا كان (ط) مستويا وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم
وحيد يعامد (ط) ويشمل م



انطلاقا مما سبق نحصل على النتائج التالية

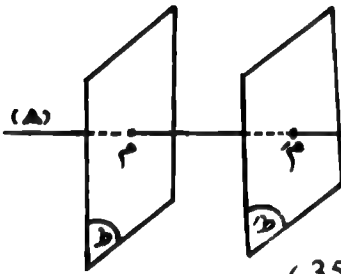
- إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم يعامد أحدهما يعامد الآخر

(الشكل 33)



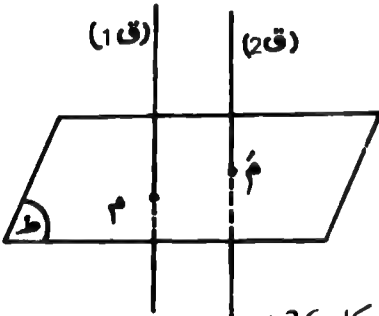
(الشكل 34)

- إذا توازى مستقيمان فإن كل مستو يعامد أحدهما يعامد الآخر



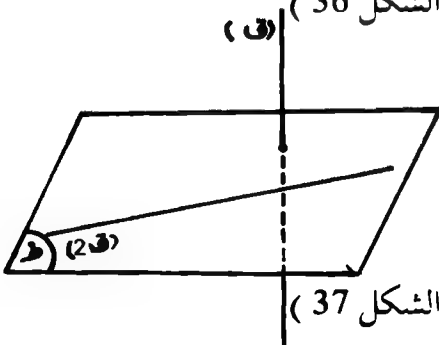
(الشكل 35)

- إذا عامد مستويان نفس المستقيم فإن هذين المستويين متوازيان



(الشكل 36)

- إذا عامد مستقيمان نفس المستوي فإن هذين المستقيمين متوازيان

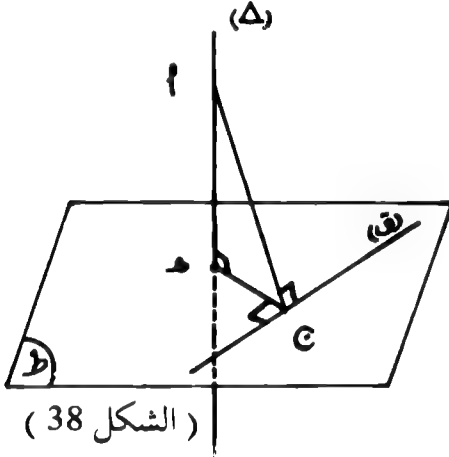


(الشكل 37)

- يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا وفقط إذا كان أحدهما عموديا على مستو يحتوي على الآخر

4.2 - تمرين محلول :

(ط) مستو و (Δ) مستقيم عمودي على (ط) في النقطة هـ
 (ق) مستقيم من (ط) لا يشمل هـ
 ا نقطة من (Δ) تختلف عن هـ و هـ نقطة من (ق)
 برهن أن : $(هـ) \perp (ق) \Leftrightarrow (ق) \perp (هـ')$



الحل :

(ق) عمودي على (Δ) لأن

(Δ) عمودي على (ط)

• إذا كان (هـ) عموديا على

(ق) يكون (ق) عموديا على

المستقيمين المتقاطعين

(هـ) و (Δ) وبالتالي

يكون (ق) عموديا

على المستوي $(هـ')$.

إذن : (ق) عمودي على $(هـ')$

• إذا كان $(هـ')$ عموديا على (ق) يكون (ق) عموديا على المستقيمين

المتقاطعين $(هـ')$ و (Δ) وبالتالي يكون (ق) عموديا على المستوي

$(هـ')$

إذن (ق) عمودي على (هـ)

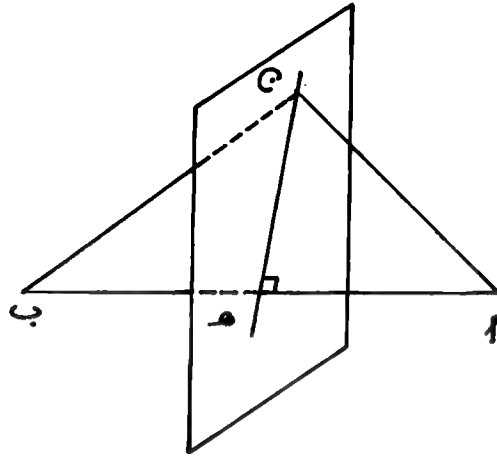
5.2 - المستوي المحوري لقطعة مستقيم :

تعريف :

ا ، ب نقطتان متمايزتان ، م منتصف القطعة [اب]

المستوي العمودي على المستقيم $(ام)$ في النقطة م يسمى المستوي

المحوري للقطعة [اب]



(الشكل 39)

ملاحظات :

- في المستوي المحوري للقطعة [ا ب] كل مستقيم يشمل منتصف [ا ب] هو محور للقطعة [ا ب]
- كل محور للقطعة [ا ب] هو مستقيم من المستوي المحوري للقطعة [ا ب]

نتيجة :

في المستوي نعلم أنه إذا كانت ا ، ب نقطتين متمايزتين فإن مجموعة النقط هـ التي تحقق المساواة $ا = هـ$ ب هي محور القطعة [ا ب] .
وفي الفضاء لدينا نتيجة مماثلة :
إذا كانت ا و ب نقطتين متمايزتين فإن مجموعة النقط هـ التي تحقق المساواة $ا = هـ$ ب هي المستوي المحوري للقطعة [ا ب]

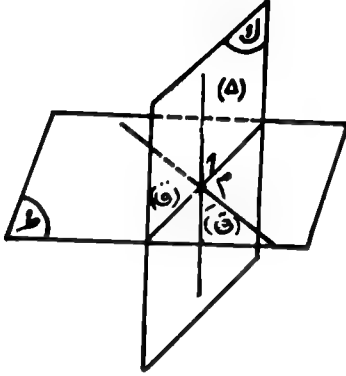
3- المستويات المتعامدة

1.3 - تعريف :

(ط) مستو و (Δ) مستقيم عمودي على (ط)
كل مستو يحتوي على (Δ) يسمى مستويا عموديا على (ط)

التعريف :

يكون مستو (ك) عموديا على مستو (ط) إذا فقط إذا احتوى
(ك) على مستقيم عمودي على (ط)



(الشكل 40)

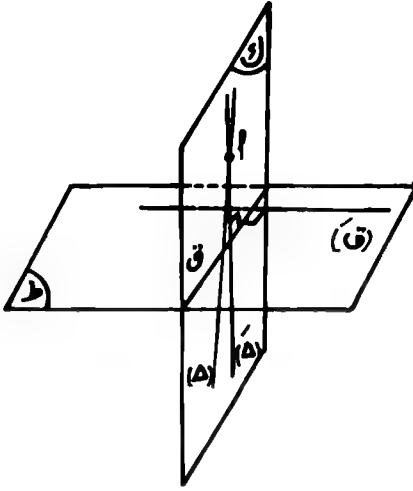
• إذا كان المستوي (ك) عموديا
على المستوي (ط) فإن (ك)
يحتوي على مستقيم (Δ) يعامد
(ط).
لتكن م نقطة تقاطع (Δ) و
(ط). المستويان (ط) و (ك)
متقاطعان وتقاطعهما مستقيم
(ق) يشمل م

ليكن (ق') المستقيم من (ط) العمودي على (ق) في النقطة م
المستقيم (ق') عمودي على المستقيمين المتقاطعين (Δ) و (ق) من
(ك). فهو عمودي على (ك)
إذن المستوي (ط) عمودي على المستوي (ك)
ومنه النتيجة التالية

إذا كان مستو (ك) عموديا على مستو (ط) فإن المستوي (ط)
عمودي على المستوي (ك) ونقول إن المستويين (ك) و (ط)
متعامدان

3. 2 - نظريات :

1. إذا كان (ك) و (ط) مستويين متعامدين وكانت أ نقطة من (ك)
فإن (ك) يحتوي على المستقيم الذي يشمل أ ويعامد ط



(الشكل 41)

البرهان :

(ط) و (ك) مستويان متعامدان

تقاطعهما المستقيم (ق) .

! نقطة من (ك) ، (Δ) مستقيم

يشمل ! ويعامد (ط) .

(Δ') مستقيم من (ك) يشمل !

ويعامد (ق) . بما أن المستويين

(ط) و (ك) متعامدان فإنه

يوجد ، في المستوي (ط) مستقيم

(ق') يعامد المستوي (ك) .

المستقيم (ق') عمودي على كل مستقيم من (ك) فهو عمودي على (Δ')

لدينا :

(Δ') يعامد المستقيمين المتقاطعين (ق) و (ق') فهو إذاً عمودي على

المستوي (ط)

المستقيمان (Δ') و (Δ) يشعلان النقطة ! ويعامدان المستوي (ط) فهما

متطابقان

إذن $(\Delta) \equiv (\Delta')$ (ك)

• مما سبق نستنتج أيضاً النتيجة التالية

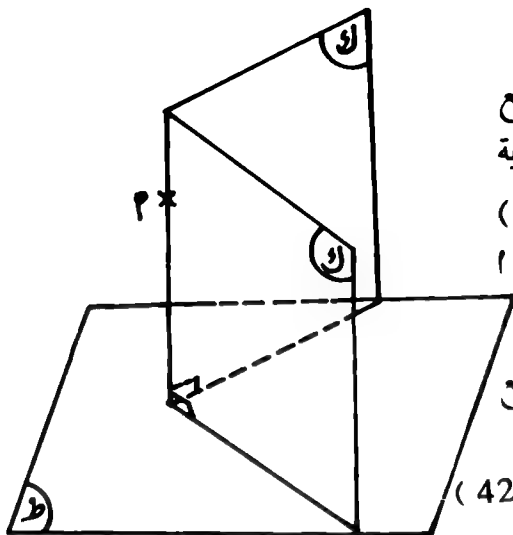
إذا كان (ك) و (ط) مستويين متعامدين وكان (ق) مستقيم تقاطعهما

فإن كل مستقيم من (ك) عمودي على (ق) يكون عمودياً على (ط)

2. إذا كان (ك) و (ك') مستويين متقاطعين وكان كل منهما عمودياً

على مستوي (ط) فإن مستقيم تقاطع (ك) و (ك') يكون عمودياً

على (ط)



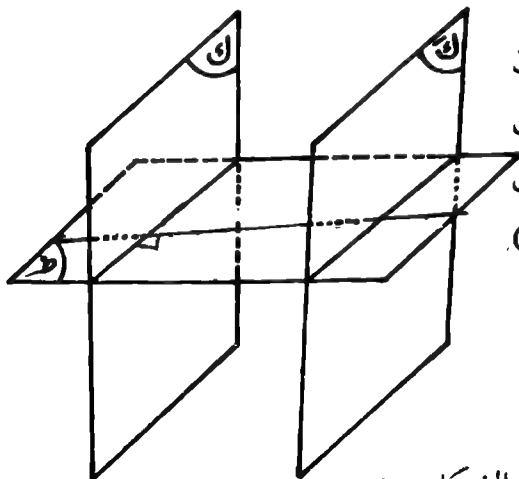
(الشكل 42)

البرهان :

لتكن α نقطة من مستقيم تقاطع
(ك) و (ك'). حسب النظرية
السابقة كل من (ك) و (ك')
يحتوي على المستقيم الذي يشمل α
ويعامد (ط).
إذاً هذا المستقيم هو مستقيم تقاطع
(ك) و (ك')

3. إذا كان (ك) و (ك') مستويين متوازيين وكان (ط) مستويا
عموديا على (ك) فإن (ط) عمودي على (ك')

البرهان :



(الشكل 43)

بما أن (ك) و (ط) متعامدان فإن
(ط) يحتوي على مستقيم عمودي
على (ك) وهذا المستقيم عمودي
على (ك') لأن (ك) و (ك')
متوازيان
إذن (ط) عمودي على (ك')

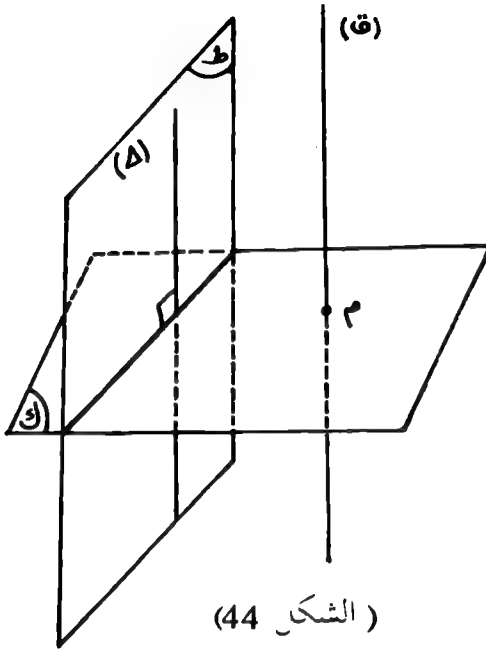
4. إذا كان مستقيم (ق) ومستو (ط) عمودين على نفس المستوي (ك) فإن (ق) و (ط) متوازيان

البرهان :

المستوي (ط) يحتوي على مستقيم
(Δ) عمودي على (ك) لأن
(ط) و (ك) متعامدان .

المستقيمان (ق) و (Δ) متوازيان
لأنهما عموديان على نفس المستوي
(ك)

إذن (ق) و (ط) متوازيان لأن
(ط) يحتوي على المستقيم (Δ)
الموازي للمستقيم (ق)



تمارين

المستويات والمستقيمات في الفضاء

1. (ط) مستو. α نقطة من (ط) و (Δ) مستقيم في (ط) لا يشمل النقطة α .
 β نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى (ط).
 أثبت أن المستقيمين (Δ) و (β) ليسا في مستو واحد.
2. (Δ) و (Δ') مستقيمان ليسا في مستو واحد.
 α ، β نقطتان مختلفتان من (Δ).
 α' ، β' نقطتان مختلفتان من (Δ').
 أثبت أن النقط α ، β ، α' ، β' ليست في مستو واحد.
3. (Δ) و (Δ') مستقيمان ليسا في مستو واحد.
 α نقطة من (Δ) و α' نقطة من (Δ').
 (Δ) و α' يعينان مستويا (ط)؛ (Δ') و α يعينان مستويا (ط').
 عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ط) و (ط').
4. α ، β ، γ ، δ أربع نقط ليست في مستو واحد.
 (1) أثبت أن ثلاث نقط منها ليست على إستقامة واحدة.
 (2) عيّن عدد المستويات المعينة بالنقط الأربع.
 ثم عيّن مستقيمات تقاطع هذه المستويات مثنى مثنى.
5. (ط) مستو. (Δ) و (Δ') مستقيمان في (ط) متقاطعان. α نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى (ط).
 (ك) المستوي المعين بالنقطة α والمستقيم (Δ).
 (ك') المستوي المعين بالنقطة α والمستقيم (Δ').
 عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ك').

6. (ط) مستو. (Δ) و (Δ') مستقيمان في (ط) متقاطعان في نقطة أ. (ق) مستقيم يقطع (ط) في نقطة م تختلف عن أ. عيّن مجموعة المستقيمات التي تقطع في آن واحد المستقيمات الثلاثة (Δ) ، (Δ') و (ق).
7. (Δ) و (Δ') مستقيمان ليسا في مستو واحد. أ، ب نقطتان من (Δ) و أ' ، ب' نقطتان من (Δ'). أثبت أن المستقيمين (أأ') و (بب') ليسا في مستو واحد.
8. (ط) مستو. ب ، ح نقطتان مختلفتان من (ط). أ نقطة لا تنتمي إلى (ط). م نقطة من المستقيم (أب) و ن نقطة من المستقيم (أح) أثبت أنه إذا قطع المستقيم (م ن) المستوي (ط) فإنه يقطع المستقيم (ب ح). 9. أ ب ح د رباعي في مستو (ط). نفرض أن أ ب ح د ليس شبه منحرف. م نقطة لا تنتمي إلى (ط). عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م أ ب) و (م ح د). ثم مستقيم تقاطع المستويين (م أ د) و (م ب ح). 10. أ ب ح د متوازي أضلاع في مستو (ط). م نقطة لا تنتمي إلى (ط). عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م أ ح) و (م ب د). 11. (ط₁) و (ط₂) مستويان متقاطعان و (Δ) مستقيم تقاطعهما. أ ، ب نقطتان مختلفتان من (ط₁) بحيث المستقيم (أ ب) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ح. م نقطة لا تنتمي إلى المستويين (ط₁) و (ط₂) بحيث يقطع المستقيمان (م أ) و (م ب) المستوي (ط₂) في النقطتين أ' ، ب' على الترتيب. أثبت أن النقط الثلاث أ' ، ب' ، ح على استقامة واحدة.

12. (ط) مستو. (Δ) مستقيم يقطع (ط) في نقطة هـ.
 أ، ب نقطتان من (Δ) و هـ نقطة من الفضاء بحيث يقطع المستقيمان (د) (أ)
 و(د) (ب) المستوي (ط) في النقطتين أ' ، ب'.
 أثبت أن النقط الثلاث هـ ، أ' ، ب' على إستقامة واحدة .

13. أ ب ح مثلث في مستو (ط) .
 أ' ، ب' ، ح' منتصفات القطع [ب ح] ، [ح أ] ، [أ ب] على الترتيب .
 و نقطة لا تنتمي إلى المستوي (ط) .
 أثبت أن المستويات (د أ أ') ، (د ب ب') ، (د ح ح') تتقاطع حسب
 مستقيم واحد يطلب تعيينه .

14. أ ب ح د رباعي وجوه . م منتصف القطعة [د أ] .
 هـ مركز ثقل المثلث أ ب ح .
 • أثبت أن المستقيم (م هـ) يقطع المستوي (ب ح د) في نقطة ي
 • أثبت أن الرباعي ب ي ح د متوازي أضلاع .

15. أ ب ح د رباعي وجوه . هـ مركز ثقل المثلث ب ح د .
 ه' مركز ثقل المثلث أ ح د .
 أثبت أن المستقيمين (أ هـ) و (ب هـ') متقاطعان .

16. أ ب ح د رباعي وجوه . (ط) . هو المستوي (ب ح د) .
 (Δ) مستقيم من (ط) يقطع المستقيمتين (ب ح) ، (د ح) ؛
 (ب د) في ثلاث نقط مختلفة . هـ نقطة من القطعة [أ ح] .
 (ك) هو المستوي المعين بالنقطة هـ والمستقيم (Δ) .
 1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (أ ب ح) .
 2) عيّن تقاطع المستقيم (أ ب) مع المستوي (ك) .
 3) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (أ ب د) .
 أثبت أن هذا المستقيم يقطع المستقيم (ب د) في نقطة تنتمي إلى (Δ) .

التوازي في الفضاء

17. (19₁) و (19₂) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
 α نقطة من (19₁) و (Δ) المستقيم الذي يشمل α ويوازي (19₂) .
 (1) أثبت أن المستوي (ط) المَعين بالمستقيمين (19₁) و (Δ) يوازي تماماً (19₂) .
 (2) بين أن المستوي (ط) ثابت ، عندما تتغير النقطة α في (19₁)
18. (19₁) و (19₂) مستقيمان ليسا في مستو واحد . و α نقطة من الفضاء .
 أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل α ويوازي المستقيمين (19₁) و (19₂) .
19. (19) و (Δ) مستقيمان متوازيان من مستو (ط) .
 (ك) و (ك') مستويان متقاطعان يحتويان على (19) و (Δ) على الترتيب .
 (Δ') مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ك') .
 ما هي وضعية المستقيم (Δ') بالنسبة إلى المستوي (ط) .
20. (ط) و (ك) مستويان متقاطعان و (19) مستقيم تقاطعهما .
 (Δ) مستقيم بحيث (Δ) و (19) ليسا في مستو واحد .
 و ω نقطة من (Δ) .
 I) ارسم المستويين (ط') و (ك') اللذين يشملان ω ويوازيان (ط) و (ك) على الترتيب
 (2) أثبت أن (ط') و (ك') متقاطعان .
 (3) إذا كان (19') مستقيم تقاطع المستويين (ط') و (ك')
 ما هي وضعية المستقيم (19') بالنسبة إلى كل من (ط) ، (ك) و (19) ؟
21. (19) مستقيم يوازي مستويا (ط) .
 α ، β نقطتان مختلفتان من (19) . م ، ω نقطتان من (ط) .
 (1) أثبت أن المستويين ($\alpha\beta$ م) و ($\alpha\beta\omega$) يقطعان (ط) .
 (2) إذا كان (Δ) مستقيم تقاطع المستويين ($\alpha\beta$ م) و (ط) وإذا كان (Δ') مستقيم تقاطع المستويين ($\alpha\beta\omega$) و (ط)
 أثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متوازيان .
 في أية حالة يتطابق فيها المستقيمان (Δ) و (Δ') ؟

22. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ رباعي وجوه .
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ متصفات القطع $[\alpha], [\beta], [\gamma], [\delta]$ ، $[\alpha], [\beta], [\gamma], [\delta]$ على الترتيب .
 أثبت أن الرباعي $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ متوازي أضلاع .
23. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ رباعي وجوه . (ط) مستويوازي كلا من المستقيمين (α) و (β) ويقطع المستقيمتين (α) ، (β) ، (γ) ، (δ) في النقاط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ، $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ على الترتيب .
 بين أن الرباعي $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ متوازي أضلاع .
24. (ق) و (ق') مستقيمان ليسا في مستو واحد .
 (Δ) مستقيم لا يوازي (ق) ولا يوازي (ق') .
 أنشئ مستقيما (Δ') يوازي (Δ) ويقطع كلا من (ق) و (ق')
25. (ط) مستو ، (Δ) مستقيم و α نقطة .
 أنشئ مستقيما يشمل α ويقطع (Δ) ويوازي (ط) .
26. (ط) و (ط') مستويان و α نقطة .
 أنشئ مستقيما يشمل α ويوازي (ط) و (ط') .
27. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أربع نقط من مستو (ط) .
 نفرض أن المستقيمين (α) و (β) يتقاطعان في النقطة ك
 وأن المستقيمين (γ) و (δ) يتقاطعان في النقطة ل .
 م نقطة لا تنتمي إلى (ط) .
 ليكن (ط') مستويا يقطع كلا من المستقيمتين (α) ، (β) ، (γ) ، (δ) في النقاط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ، $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ على الترتيب .
 1) عين مستقيم تقاطع المستويين (α) و (β) .
 ثم عين نقطة تقاطع المستقيم (α) والمستوي (ط') .
 2) كيف يؤخذ المستوي (ط') حتى يكون :
 $(\alpha\beta) \parallel (\lambda\delta)$ أو $(\lambda\alpha) \parallel (\delta\beta)$ ؟

3) لتكن ω نقطة من الفضاء .

أنشئ المستوي (π) الذي يشمل النقطة ω بحيث يكون الرباعي $\alpha \beta \delta \lambda$ متوازي أضلاع .

28. (π) و (π') مستويان غير متوازيين .

$ABCD$ متوازي أضلاع في (π) . $A'B'C'D'$ أربع نقط من المستوي (π') بحيث تكون المستقيمت (AA') ، (BB') ، (CC') ، (DD') متوازية .

ما نوع الرباعي $A'B'C'D'$ ؟

29. $ABCD$ متوازي أضلاع في مستو (π) .

M ، N نقطتان لا تنتميان إلى (π) بحيث يكون الرباعي $AMCN$ متوازي أضلاع .

أثبت أن $(BM) // (DN)$ وأن $(BN) // (DM)$.

30. (π) و (π') مستويان متوازيان تماماً .

$ABCD$ مثلث في (π) . M ، N نقطتان متمايزتان من (π') .

(1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ABN) و (π') .

(2) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ACM) و (π') .

(3) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ABN) و (ACM) .

31. [أس] و [ب ع] نصفاً مستقيمين غير محتويين في نفس المستوي .

M ، N نقطتان حيث : $M \in [أس]$ ، $N \in [ب ع]$ و $AM = BN$

(1) أنشئ المستوي (π) الذي يحتوي على $[ب ع]$ ويوازي $[أس]$

(2) أثبت أن المستقيم الذي يشمل النقطة M ويوازي المستقيم (AB) يقطع المستوي (π) في نقطة M' .

عيّن مجموعة النقط M' عندما تتغير النقطة M في $[أس]$.

(3) إذا كانت α ، β ، δ متصفات القطع $[AB]$ ، $[AM']$ و $[M'N]$ على

الترتيب ، أثبت أن المستوي $(\alpha \beta \delta)$ يوازي المستوي (π) .

التعامد في الفضاء

32. $a \perp b$ و $a \perp c$ و $b \perp c$ مكعب

أثبت أن المستقيمين (a) و (b) و (c) متعامدان
وأن المستقيمين (b) و (c) و (a) متعامدان .

33. (Δ) و (Δ') مستقيمان متقاطعان في مستو (π) .

(Γ) و (Γ') مستويان عموديان على (Δ) و (Δ') على الترتيب .
أثبت أن المستويين (Γ) و (Γ') متقاطعان وأن مستقيم تقاطعها عمودي على (π) .

34. (π) و (π') مستويان متقاطعان ومستقيم تقاطعها (Δ) .
 Γ نقطة لا تنتمي إلى المستويين (π) و (π') .

المستقيم الذي يشمل Γ والعمودي على (π) يقطعه في النقطة Γ .
المستقيم الذي يشمل Γ والعمودي على (π') يقطعه في النقطة Γ' .
1) أثبت أن (Δ) عمودي على المستوي $(\Gamma\Gamma')$.

2) إذا كانت Γ نقطة تقاطع (Δ) مع المستوي $(\Gamma\Gamma')$.
أثبت أن Γ عمودي على (Δ) .

35. (Γ) و (Γ') مستقيمان متعامدان وغير محتويين في نفس المستوي .
 Γ نقطة من (Γ) ؛ Γ' نقطة من (Γ') بحيث يكون $(\Gamma\Gamma')$ عموديا على (Δ) .
أثبت أنه مهما كانت النقطة Γ من (Γ) فإن $(\Gamma\Gamma')$ عمودي على (Δ) .

36. (Γ) و (Γ') مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في النقطة Γ .
 (Γ') المستقيم الذي يشمل Γ والعمودي على المستوي المعين بالمستقيمين (Γ) و (Δ) .

1) أثبت أن (Δ) عمودي على المستوي (π) المعين بالمستقيمين (Γ) و (Γ') .
و (Γ') .

2) أثبت أن (π) هو المستوي الوحيد الذي يحتوي على (Γ) ويعامد (Δ) .

37. (Γ) و (Γ') مستقيمان متعامدان وغير محتويين في نفس المستوي .
 Γ نقطة من (Γ) و Γ' نقطة من (Γ') بحيث : $(\Gamma\Gamma') \perp (\Delta)$.

- (ط) المستوي المعين بالنقطة هـ والمستقيم (و) .
- (1) أثبت أن (ط) عمودي على (Δ) .
- (2) أثبت أن (ط) هو المستوي الوحيد الذي يحتوي على (و) ويعامد (Δ) .
38. (1) (Δ) مستقيم و م نقطة من (Δ) .
 (ط) و (ط') مستويان متقاطعان وتقاطعهما (Δ) .
 (و) المستقيم من (ط) الذي يشمل م ويعامد (Δ) ؛ (و') المستقيم من (ط') الذي يشمل م ويعامد (Δ) .
 أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقطة م ويعامد (Δ)
- (2) (Δ) مستقيم و م نقطة لا تنتمي إلى (Δ) ، (Δ') المستقيم الذي يشمل م ويوازي (Δ) .
 باستعمال نتيجة السؤال السابق ، أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقطة م ويعامد المستقيم (Δ) .
39. (ط) مستو و هـ نقطة من الفضاء .
 (و) و (و') مستقيمان متقاطعان من (ط) .
 حسب التمرين السابق نعلم أنه يوجد مستو وحيد (ك) يشمل هـ ويعامد (و) ويوجد مستو وحيد (ك') يشمل هـ ويعامد (و') .
 أثبت أن المستويين (ك) و (ك') متقاطعان وأن مستقيم تقاطعهما (Δ) يعامد المستوي (ط) .
 استنتج أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل هـ ويعامد المستوي (ط)
40. نعتبر ، في مستو (ط) ، دائرة (س) قطرها أ ب
 (Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة أ .
 ح نقطة من (Δ) و هـ نقطة من (س) .
 (1) أثبت أن المستقيم (ب هـ) عمودي على المستوي (ح أ هـ) .
 (2) استنتج أن المثلث ح هـ ب قائم .
41. أ ب ح ، أ ب د مثلثان متساويا الساقين وغير محتوين في نفس المستوي حيث
 $ح أ = د أ$ و $س د = ب د$.

ي منتصف القطعة [أب]

- (1) أثبت أن المستقيم (أب) عمودي على المستوي (حـيـد).
- (2) أثبت أن المستقيمين (أب) و (حـد) متعامدان.

42. أبـحـ مثلث في مستو (ط).

- (Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة أ. م نقطة من (Δ).
م' نقطة من [أبـ] ؛ ب' نقطة من [أـمـ] و ب'' نقطة من [أـحـ]
حيث : (أـمـ)' ⊥ (أـبـ) و (أـبـ)' ⊥ (أـمـ) و (أـبـ)'' ⊥ (أـحـ)
(1) أثبت أن (أـمـ)' عمودي على (أـبـ).
(2) أثبت أن (أـبـ)'' عمودي على المستوي (أـمـ.أـحـ)
(3) أثبت أن (أـمـ) عمودي على المستوي (أـبـ.أـبـ)'
(4) إذا كانت ه نقطة تقاطع المستقيمين (أـمـ)' و (أـبـ)' وكانت ه' نقطة تقاطع المستقيمين (أـمـ)' و (أـبـ)'' أثبت أن (هـه') عمودي على المستوي (أـمـ.أـبـ)

43. أبـحـ مستطيل في مستو (ط).

- (Δ) و (Δ') المستقيمان العموديان على (ط) في النقطتين حـ ، د على الترتيب .
هـ نقطة من (Δ) و هـ' نقطة من (Δ') حيث (أـهـ) ⊥ (أـهـ')
(1) أثبت أن (أـبـ) عمودي على المستوي (أـدـهـ')
(2) أثبت أن (أـهـ') عمودي على المستوي (أـبـهـ)
(3) أثبت أن (أـهـ) عمودي على المستوي (أـبـهـ')
(4) إذا كان هـ منتصف القطعة [هـه'] ، أثبت أن النقطة هـ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [أب].

44. أبـحـ مثلث في مستو (ط).

- هـ نقطة تلاقي أعمدته و (Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة هـ . و نقطة من (Δ).
أثبت أن :
(أـدـ) ⊥ (أـبـ) و (أـدـ) ⊥ (أـحـ) و (أـدـ) ⊥ (أـبـ).

45. $AB \perp CD$ رباعي وجوه بحيث يكون $(AB) \perp (CD)$ و $(AB) \perp (CD)$.

المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AB) يقطع هذا المستوي في النقطة H .

أثبت أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

46. (1) $AB \perp CD$ مربع. عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث تكون الأطوال MA, MB, MC, MD متساوية.

(2) نفس السؤال إذا كان $AB \perp CD$ مستطيلاً.

(3) نفس السؤال إذا كان $AB \perp CD$ معيناً.

47. (P) و (P') مستويان متعامدان.

(Δ) مستقيم عمودي على (P) و (Δ') مستقيم عمودي على (P') .

(1) أثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان.

(2) أثبت أن: $(\Delta) // (P')$ و $(\Delta') // (P)$.

48. لتكن، في مستو (P) ، دائرة (S) قطرها AB .

(Δ) المستقيم العمودي على (P) في النقطة A . H نقطة من (Δ) .

H' نقطة من (S) .

(1) أثبت أن المستويين (AH') و (BH) متعامدان.

(2) A' نقطة من القطعة $[AH]$.

المستوي $(A'B')$ الذي يشمل A' ويعامد (AH) يقطع (BH) في النقطة H' .

ويقطع (BH) في النقطة B' .

أثبت أن المثلث $A'B'H'$ قائم.

49. (S) دائرة في مستو (P) مركزها M .

(Δ) المستقيم العمودي على (P) في النقطة M .

H نقطة من (Δ) ؛ A نقطة من (S) و (Q) المماس للدائرة (S) في النقطة A .

أثبت أن المستوي المعين بالنقطة H والمستقيم (Q) عمودي على المستوي

(AMH) .

50. $AB \perp CD$ رباعي وجوه حيث : $AB = CD$ و $AC = BD$ و $AD = BC$.
 H منتصف القطعة $[AB]$ و H' منتصف القطعة $[CD]$.
- (1) أثبت أن المستويين (HCD) و $(H'AB)$ متعامدان
 - (2) أثبت أن المستوي (HCD) عمودي على المستويين (ABD) و (ABC) وأن المستوي $(H'AB)$ عمودي على المستويين (ACD) و (BCD) .

محتويات الكتاب

الجزء الثاني

الباب السادس : المعادلات والمتراجحات

- 20 . كثيرات الحدود 06
- 21 . المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى 17
- 22 . المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية 33
- 23 . جل معادلات وجل متراجحات 57
- تمارين 72

الباب السابع : حساب المثلثات

- 24 . الأقواس الموجهة 102
- 25 . حساب المثلثات 113
- 26 . المعادلات المثلثية الأساسية 123
- تمارين 140

الباب الثامن : الدوال العددية

- 27 . عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي 154
- 28 . الدالة التآلفية 163
- 29 . الدالة $s \mapsto s^2 + b s + c$ ($0 \neq c$) 170
- 30 . الدالة $s \mapsto \frac{1}{s}$ ($0 \neq c$) 184
- تمارين 191

الباب التاسع : الهندسة الفضائية

- 31 . المستويات والمستقيمات في الفضاء 210
- 32 . التوازي في الفضاء 217
- 33 . التعامد في الفضاء 227
- تمارين 238



MS - 1105
2002 - 2001

